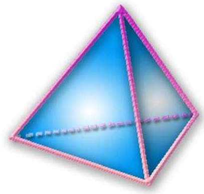
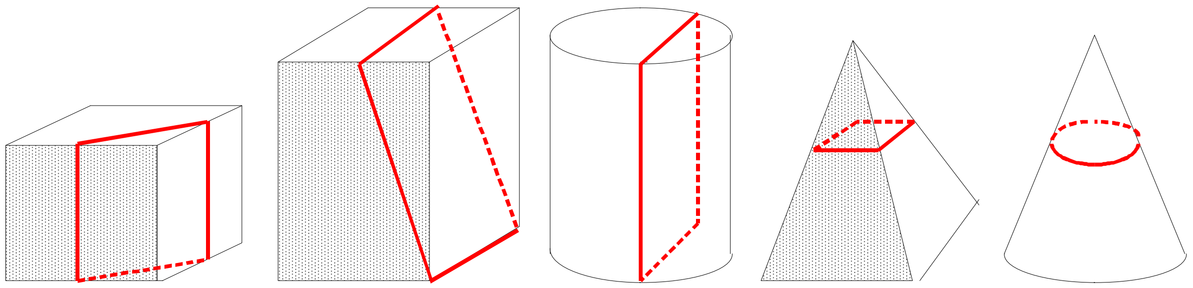
THEME 18 : GEOMETRIE DE L'ESPACE (2)
MODELISER UNE SITUATION SPATIALE - Section
TRANFORMATIONS
EFFET D'UN AGRANDISSEMENT – REDUCTION

A la fin du thème, tu dois savoir :

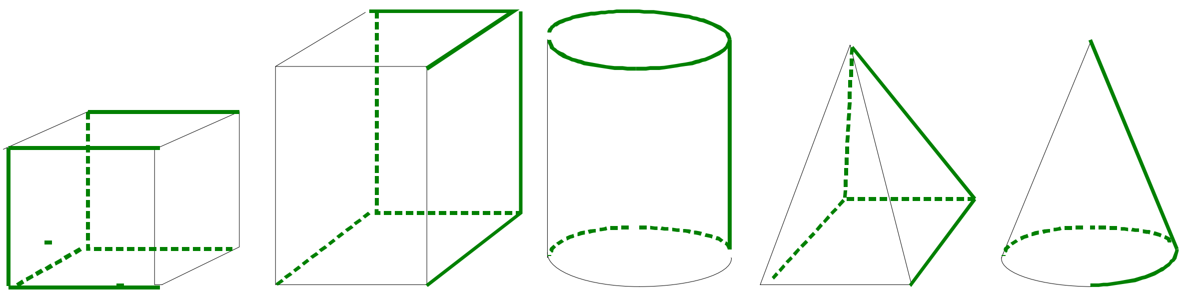


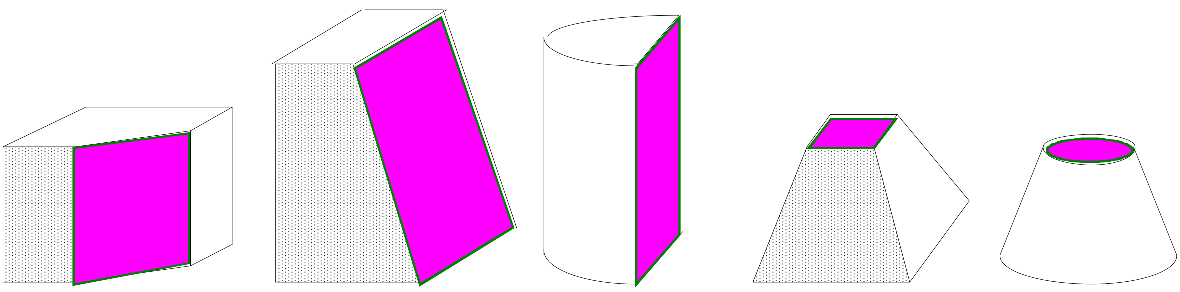
- Dessiner et calculer l'aire d'une section d'un pavé droit par un plan .
- Calculer les dimensions de la section d'un cylindre par un plan.
- Calculer le volume d'un cône « réduit »
- Comment calculer le rayon de la section d'une sphère par un plan.
- Représenter la section d'un prisme droit par un plan avec Geogebra.
- Agrandissement - Réduction
- Comprendre les effets d'un agrandissement ou d'une réduction sur les longueurs et les angles
- Comprendre les effets d'un agrandissement ou d'une réduction sur les Aires et les volumes
- Comprendre l'effet d'une homothétie sur une figure
- Trouver le coefficient d'agrandissement ou de réduction.

ACTIVITE 1:



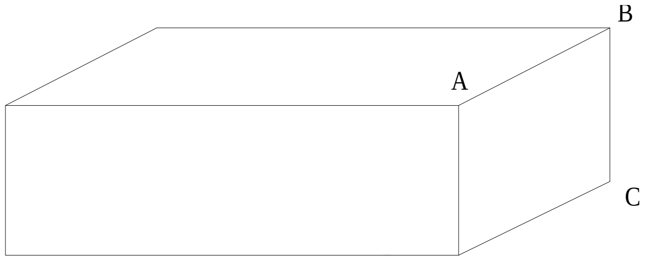
Cube	Pavé	Cylindre	Pyramide	Cône de révolution

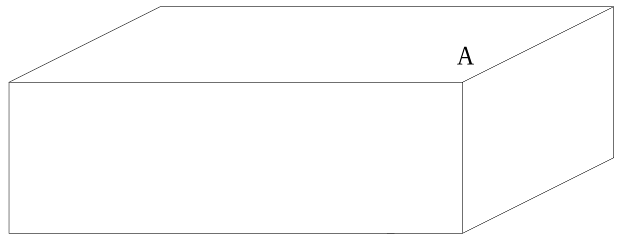


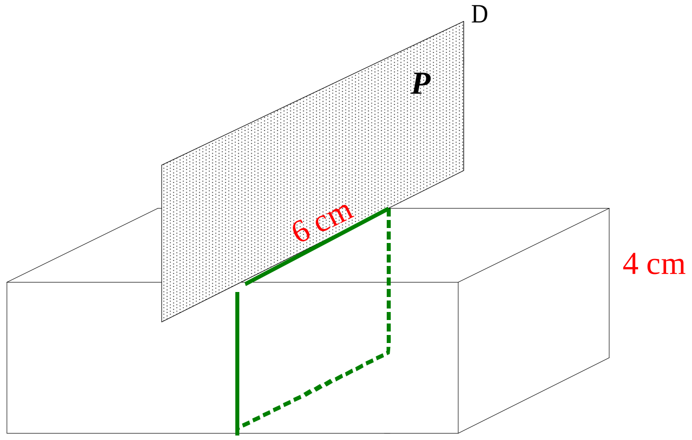


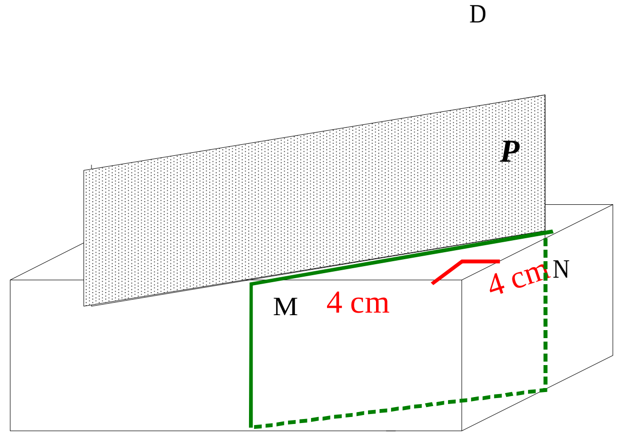
Nature: Rectangle	Nature: Rectangle	Nature: Rectangle	Nature: Rectangle	Nature: Disque

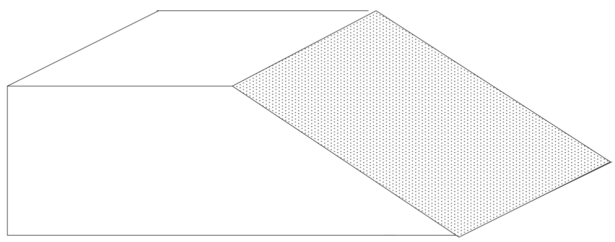
ACTIVITE 2:

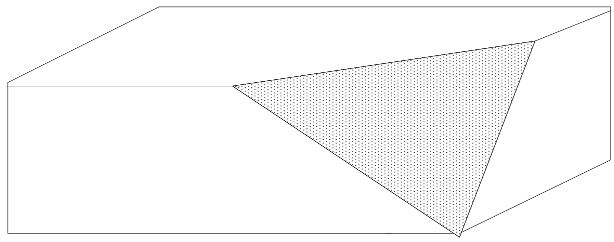


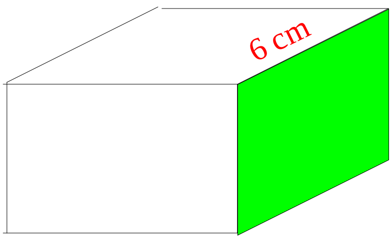


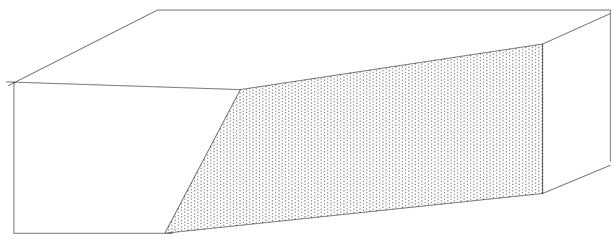


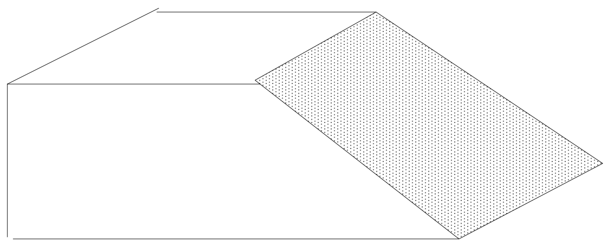


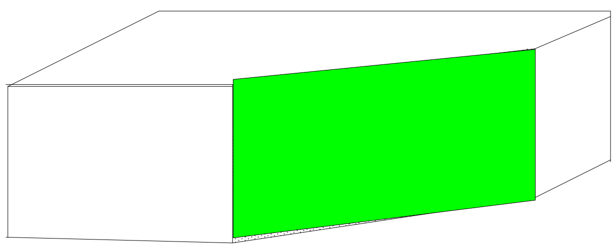


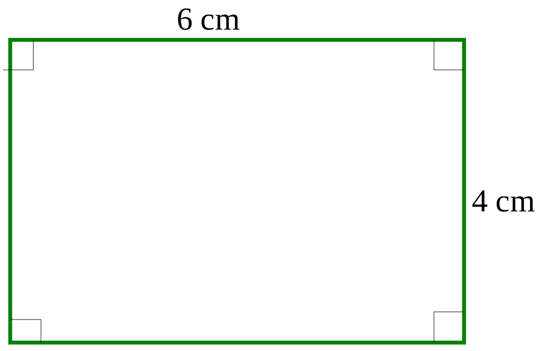


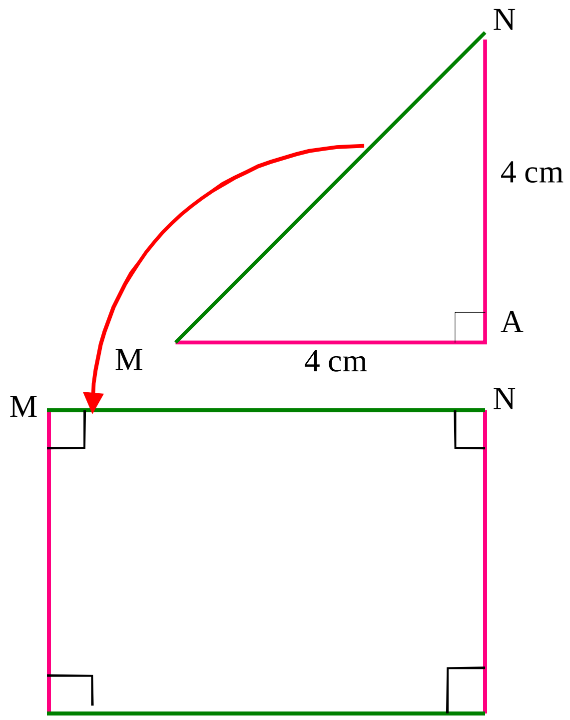




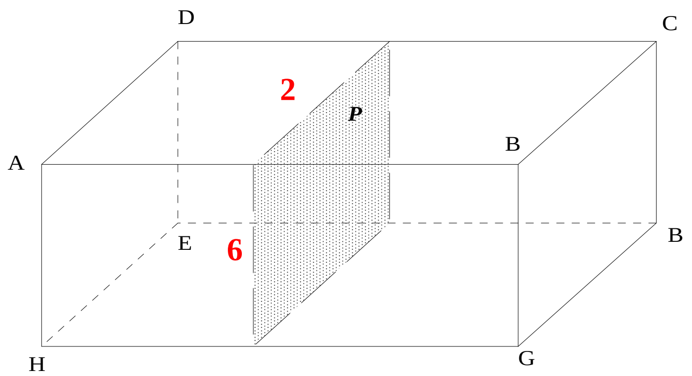


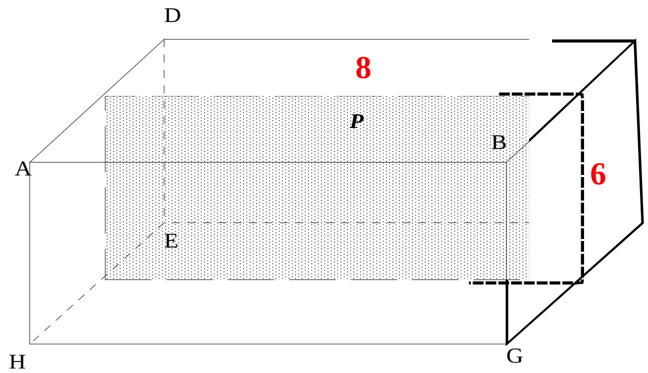


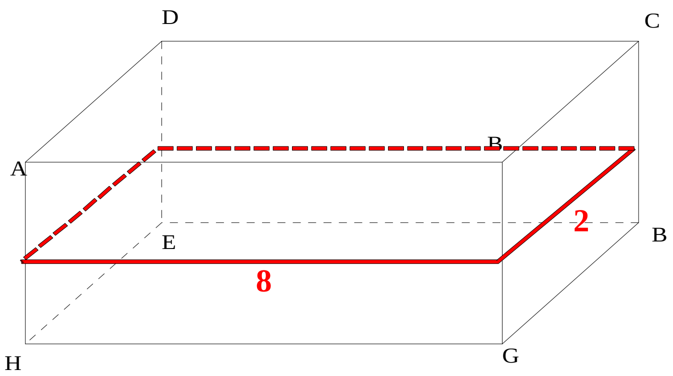




Exercice n°1:







a. P est un plan parallèle à la face ADEH.

La section obtenue est un rectangle. $\mathcal{A} = 2 \times 6 = 12\ (\text{cm}^2)$

b. P est un plan parallèle à la face ABGH.

La section obtenue est un rectangle. $\mathcal{A} = 8 \times 6 = 48\ (\text{cm}^2)$

c. P est un plan parallèle à ABCD

La section obtenue est un rectangle. $\mathcal{A} = 2 \times 8 = 16\ (\text{cm}^2)$

Exercice n°2:

a. P est un plan parallèle à (AB) et passant par D et C.

La section obtenue est un rectangle.

Calcul de DH :

Dans le triangle ADH rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$DH^2 = AD^2 + AH^2$

$DH^2 = 12^2 + 5^2$

$DH^2 = 144 + 25$

$DH^2 = 169$

DH = 13 (cm)

Calcul de l'aire de la section :

$\mathcal{A} = DH \times DC = 13 \times 16 = 208 \text{ (cm}^2\text{)}$

b. P est un plan parallèle à (BG) et passant par A et I.

La section obtenue est un rectangle.

Calcul de AI :

Dans le triangle ADI rectangle en D, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$AI^2 = AD^2 + DI^2$

$AI^2 = 12^2 + 9^2$

$AI^2 = 144 + 81$

$AI^2 = 225$

AI = 15 (cm)

Calcul de l'aire de la section :

$\mathcal{A} = AI \times AH = 15 \times 5 = 75 \text{ (cm}^2\text{)}$

c. P est un plan parallèle à (BG) et passant par A et C.

La section obtenue est un rectangle.

Calcul de AC :

Dans le triangle ADC rectangle en D, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$AC^2 = AD^2 + DC^2$

$AC^2 = 12^2 + 16^2$

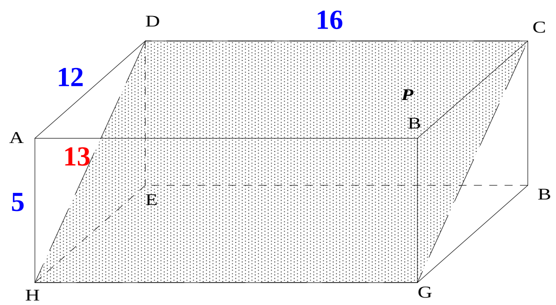
$AC^2 = 144 + 256$

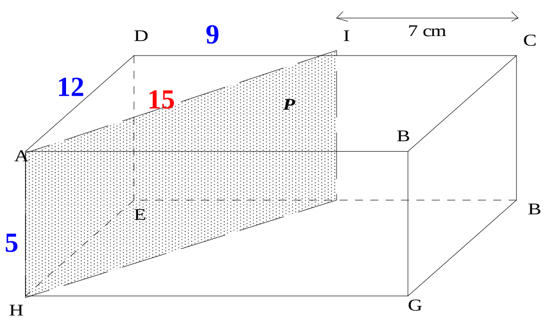
$AC^2 = 400$

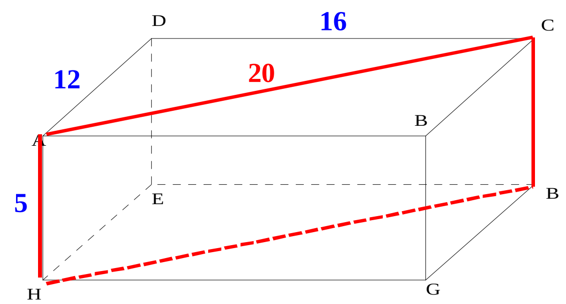
AC = 20 (cm)

Calcul de l'aire de la section :

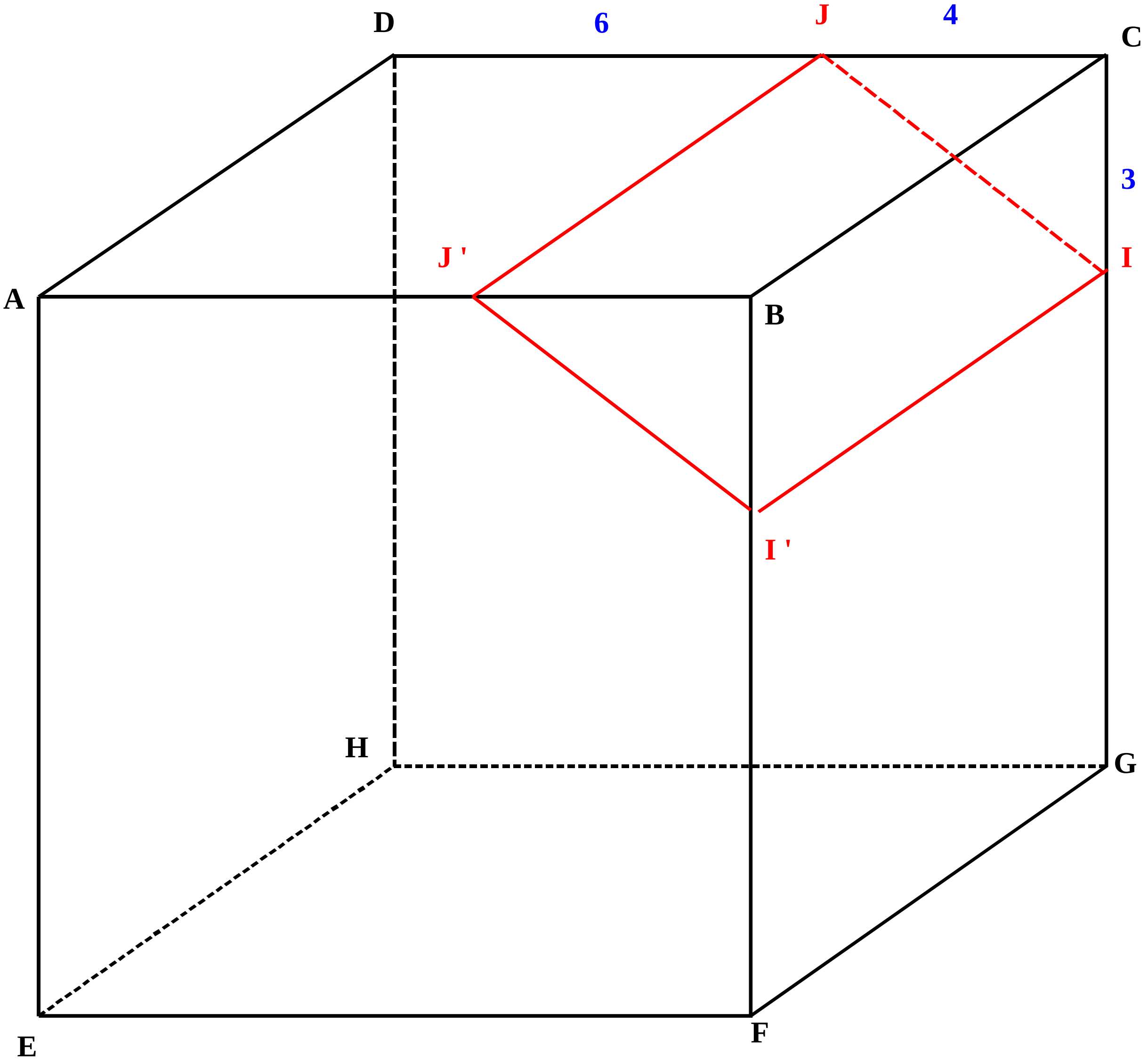
$\mathcal{A} = AC \times AH = 20 \times 5 = 100 \text{ (cm}^2\text{)}$







Exercice n°3:



La section obtenue est un rectangle.

<u>Calcul de JI :</u>

Dans le triangle ACI rectangle en C, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$IJ^2 = JC^2 + CI^2$

$IJ^2 = 4^2 + 3^2$

$IJ^2 = 16 + 9$

$IJ^2 = 25$

JI = 5 (cm)

<u>Calcul de l'aire de la section :</u>

$\mathcal{A}$ = J'J $\times$ IJ = 10 $\times$ 5 = 50 (cm^2)

Exercice n°4:

a. **Nature du triangle OAB**

Les points A et B appartiennent au cercle de centre O. Donc, OA et OB sont deux rayons de ce cercle et OA = OB.

Conclusion : OAB est un triangle isocèle en O.

b. **Calcul de BH**

OBH est un triangle rectangle en H. D'après le théorème de Pythagore, on a :

Dans le triangle ACI rectangle en C, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$OB^2 = BH^2 + HO^2$

$5^2 = BH^2 + 3^2$

$25 = BH^2 + 9$

$BH^2 = 25 - 9$

$BH^2 = 16$

$BH = 4$

Conclusion : BH= 4 cm

c. **Aire de la section**

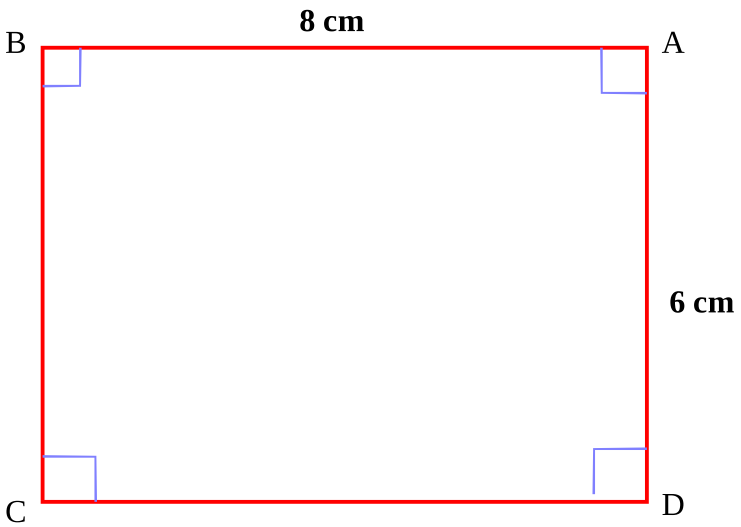
Dans un cylindre, la section par un plan parallèle à l'axe est un rectangle.

Donc ABCD est un rectangle.

$\mathcal{A} = AB \times BC = (2 \times 4) \times 6 = 48$

Conclusion : L'aire de la section est 48 cm^2

d. Dessin de la section en vrai grandeur.



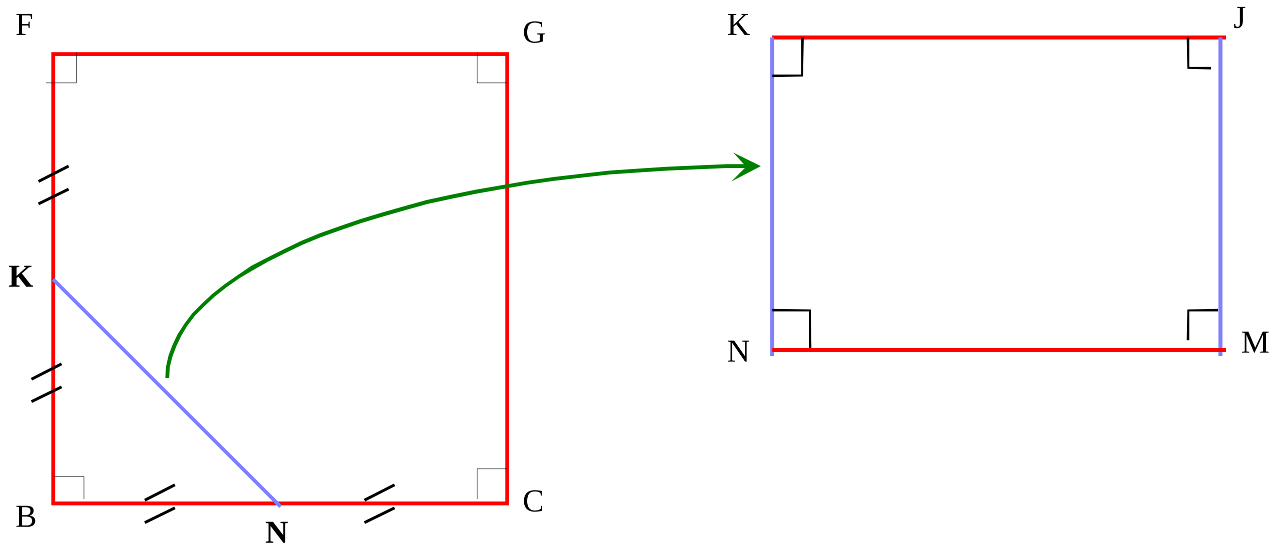
Exercice n°5 : *Sujet Brevet : Groupe Ouest – exercice2*

Donner, sans justifier, la nature de la section JKNM.

La section obtenue est un rectangle.

Quelle est la nature du solide AJMBKN ?

Le solide a deux faces triangulaires qui sont superposables et parallèles et trois faces rectangulaires : le solide AJMBKN est un prisme droit dont la base et un triangle.



Exercice n°6 :

1. Calcul de A'B'

Sachant que **la section de la pyramide est parallèle à la base alors** les droites (B'A') et (BA) sont parallèles.
De plus les droites (AA') et (BB') sont sécantes en S.

D'après le théorème de Thalès, on a : $\frac{SB'}{SB} = \frac{SA'}{SA} = \frac{B'A'}{BA}$

D'où $\frac{6}{9} = \frac{A'B'}{8}$ soit $A'B' = \frac{8 \times 6}{9} = \frac{48}{9} = \frac{16}{3}$

Conclusion : A'B'= $\frac{16}{3}$ cm

2. Calcul de l'aire A_1 de ABCD.

$A_1 = AB \times BC = 8 \times 6 = 48$. $A_1 = 48$ cm^2

3. Calcul de l'aire A_2 de A'B'C'D'.

Calcul de A'D'

Les droites (D'A') et (DA) sont parallèles et les droites (AA') et (DD') sont sécantes en S.

D'après le théorème de Thalès, on a : $\frac{SD'}{SD} = \frac{SA'}{SA} = \frac{D'A'}{DA}$

D'où $\frac{6}{9} = \frac{A'D'}{6}$ soit $A'D' = \frac{6 \times 6}{9} = \frac{36}{9} = 4$

Conclusion : A'D'= 4 cm

Calcul de l'aire A_2 de A'B'C'D'

$A_2 = A'B' \times B'C' = \frac{16}{3} \times 4 = \frac{64}{3}$ $A_2 = \frac{64}{3}$ cm^2

4. Calcule le volume V_1 de SABCD.

Le volume d'une pyramide est définie par $\frac{1}{3} \times \text{aire de la base} \times \text{hauteur}$

$V_1 = \frac{1}{3} \times A_1 \times SA = \frac{1}{3} \times 48 \times 9 = 144$

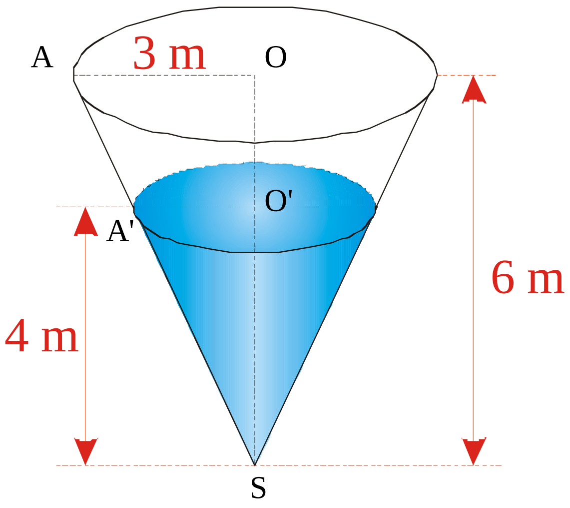
Le volume V_1 de SABCD est 144 cm^3

5. Calcule le volume V_2 de SA'B'C'D'.

$V_2 = \frac{1}{3} \times A_2 \times SA' = \frac{1}{3} \times \frac{64}{3} \times 6 = \frac{64 \times 3 \times 2}{3 \times 3} = \frac{128}{3}$

Le volume V_2 de SA'B'C'D' est $\frac{128}{3}$ cm^3

Exercice n°7 :



1. Calcule le volume exact V_1 du bassin.

Le volume d'un cône est définie par

$\frac{1}{3} \times \text{aire de la base} \times \text{hauteur}$

On a : $V_1 = \frac{1}{3} \times \pi \times OA^2 \times SO = \frac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times 6 = 18\pi$

Conclusion : $V_1 = 18\pi\ m^3$

2. Quelle est la nature du volume occupé par l'eau ?

On sait que : La section d'un cône de révolution par un plan parallèle à la base est un disque qui est une réduction du disque de base.

Conclusion : le volume occupé par l'eau est un cône de révolution de rayon O'A' et de hauteur SO'

3. Calcule le volume d'eau V_2 contenu dans le bassin.

Calcul du rayon O'A' :

Sachant que **la section du cône est parallèle à la base alors** les droites (O'A') et (OA) sont parallèles.

De plus les droites (O'O) et (A'A) sont sécantes en S.

D'après le théorème de Thalès, on a : $\frac{SO'}{SO} = \frac{SA'}{SA} = \frac{O'A'}{OA}$

D'où $\frac{4}{6} = \frac{O'A'}{3}$ soit $O'A' = \frac{3 \times 4}{6} = \frac{12}{6} = 2$

Conclusion : O'A' = 2 m

Le volume d'un cône est définie par $\frac{1}{3} \times \text{aire de la base} \times \text{hauteur}$

On a : $V_2 = \frac{1}{3} \times \pi \times O'A'^2 \times SO' = \frac{1}{3} \times \pi \times 2^2 \times 4 = \frac{16}{3}\pi$

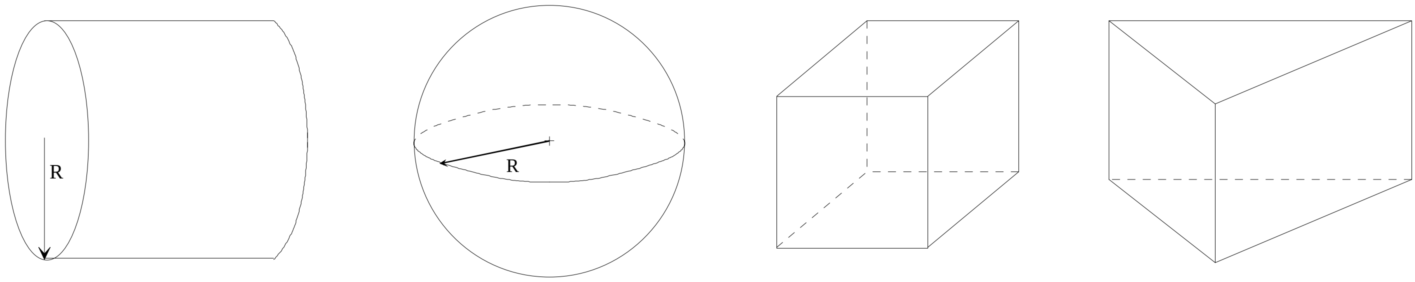
Conclusion : $V_2 = \frac{16}{3}\pi\ m^3$

4. Calcule le volume d'eau V_3 qu'il faut ajouter pour remplir le bassin, arrondi au m^3 près.

$V_3 = V_1 - V_2 = 18\pi - \frac{16}{3}\pi = \frac{54\pi - 16\pi}{3} = \frac{38}{3}\pi$

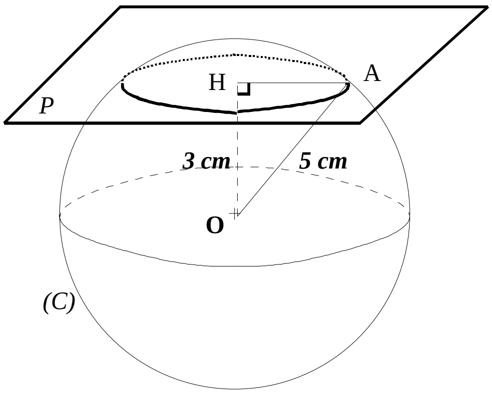
Conclusion : le volume d'eau qu'il faut ajouter est de $\frac{38}{3}\pi$.

ACTIVITE 3 : SECTION D'UNE SPHERE PAR UN PLAN :



En coupant certains de ces solides par un plan, on peut obtenir comme section un rectangle, un cercle, etc.
Compléter par oui ou par non.

Solides coupés par un plan: / La section peut être:	cylindre	sphère	cube	prisme
un rectangle	**Oui**	**Non**	**Oui**	**Oui**
un triangle	**Non**	**Non**	**Oui**	**Oui**
un cercle de rayon R	**oui**	**oui**	**non**	**non**



Exercice n°8 :

La section obtenue est un cercle de centre H et de rayon HA.
OHA est rectangle en H, donc d'après le théorème de Pythagore on a :

$OA^2 = OH^2 + HA^2$

$5^2 = 3^2 + HA^2$

$HA^2 = 25 - 9$

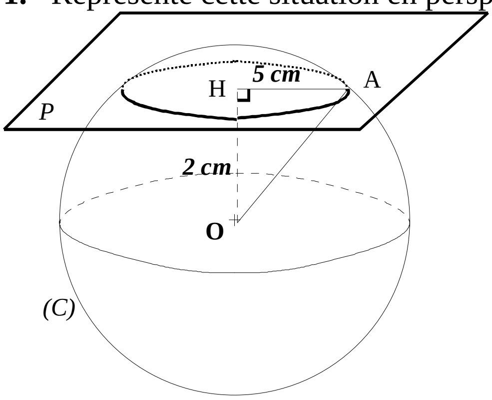
$HA = \sqrt{16}$

$HA = 4$

Le rayon de la section mesure 4 cm.

Exercice n°9 :

1. Représente cette situation en perspective et place un point A du cercle (*C*) .



2. La section obtenue est un cercle de centre H et de rayon HA.
OHA est rectangle en H, donc d'après le théorème de Pythagore on a :

$OA^2 = OH^2 + HA^2$

$OA^2 = 2^2 + 5^2$

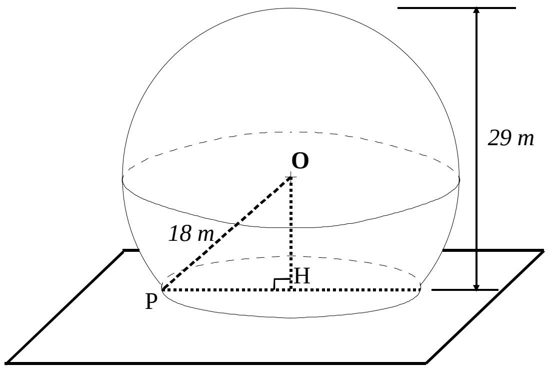
$OA^2 = 29$

$OA = \sqrt{29}$

$OA \approx 5,38$

Le rayon de la sphère mesure environ 5,4 cm

Exercice n°10 :



1°) Calcul de OH

On a : $OH = 29 – OP = 29 – 18 = 11$. OH mesure 11 m

2°) Calcul de PH

La section obtenue est un cercle de centre H et de rayon PA.

OHP est rectangle en H, donc d'après le théorème de Pythagore on a :

$OP^2 = OH^2 + HP^2$

$PH^2 = OP^2 - HO^2$

$PH^2 = 18^2 - 11^2$

$PH = \sqrt{203}$

$PH \approx 14{,}25$

Le rayon de la section mesure environ 14,25 m

2°) Calcul du périmètre et l'aire de la surface au sol

Soit P le périmètre, on a : $P = 2\pi PH \approx 2 \times \pi \times 14{,}25 \approx 89{,}54$

Le périmètre mesure environ 89,54 m

Soit A l'aire, on a : $A = \pi PH^2 \approx \pi \times 14{,}25^2 \approx 638$.

L'aire mesure environ 638 m²

Exercice n°11 :

1°) Calcul de OH

On a : $OH = 5 – 1 = 4$. OH mesure 4 cm

2°) Calcul de AH

La section obtenue est un cercle de centre H et de rayon HA.

OHA est rectangle en H, donc d'après le théorème de Pythagore on a :

$OA^2 = OH^2 + HA^2$

$AH^2 = OA^2 - HO^2$

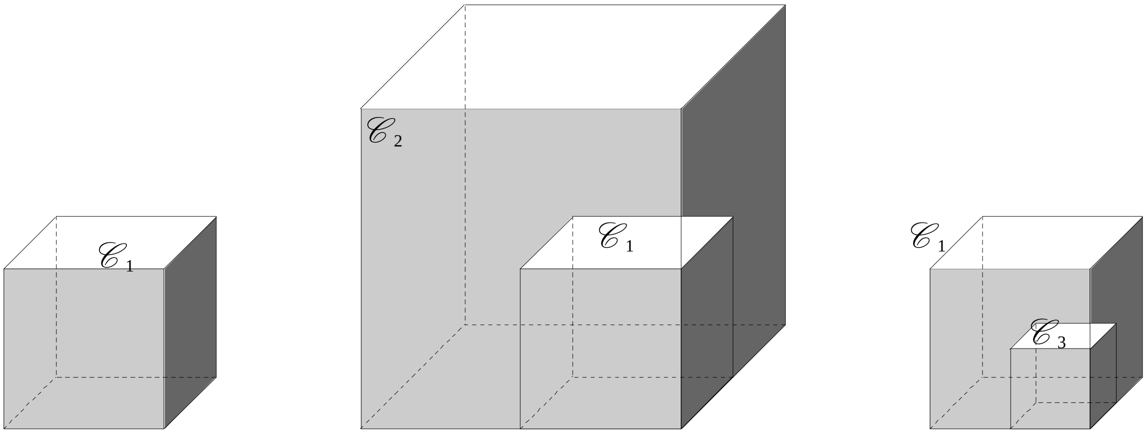
$AH^2 = 5^2 - 4^2$

$AH = \sqrt{9}$

$AH = 3$

Le rayon de la section mesure 3 cm

ACTIVITE 4 : « Agrandissement – réduction »



On mettra les résultats dans le tableau ci-dessous.

1°) On considère un cube C_1 d'arête 3 cm. Calcule l'aire de chaque face du cube et le volume de ce cube.

Aire $C_1 = 3^2 = 9$ (cm²) **Volume $C_1 = 3^3 = 27$ (cm ^{3})** .

2°) On multiplie la longueur des arêtes par 2 ; on obtient le cube C_2.
a) Quelle est la longueur des arêtes du cube C_2 ? : **$2 \times 3 = 6$ (cm)**
b) Calcule l'aire de chaque face du cube C_2 et le volume de ce cube.

Aire $C_2 = 6^2 = 36$ (cm²) **Volume $C_2 = 6^3 = 216$ (cm ^{3})**

c) Par quel nombre l'aire de chaque face du cube C_1 a-t-elle été multipliée pour obtenir l'aire de chaque face du cube C_2 ? : **L'aire a été multipliée par $2^2 = 4$ (36 : 9 = 4)**

Même question pour le volume : **Le volume a été multiplié par $2^3 = 8$ (216 : 27 = 8)**

3°) On divise la longueur des arêtes de C_1 par 2; on obtient le cube C_3.
a) Quelle est la longueur des arêtes du cube C_3 ? **3 : 2 = 1,5 (cm)**
b) Calcule l'aire de chaque face du cube C_3 et le volume de ce cube.

Aire $C_3 = 1{,}5^2 = 2{,}25$ (cm²) **Volume $C_3 = 1{,}5^3 = 3{,}375$ (cm ^{3})** .

c) Par quel nombre la longueur de chaque arête du cube C_1 a-t-elle été multipliée pour obtenir la longueur de chaque
arête du cube C_3 ? **La longueur a été multipliée par 0,5 ($3 \times 0{,}5 = 1{,}5$ (cm))**

Même question pour l'aire de chaque face et pour le volume :
L'aire a été multipliée par $0{,}5^2 = 0{,}25$ (2,25 : 9 = 0,25)
Le volume a été multiplié par $0{,}5^3 = 0{,}125$ (3,375 : 27= 0,125)

4°) Reprends le questionnement sur l'aire des faces et le volume dans le cas où la longueur des arêtes a été multipliée par un nombre positif *k*.

	Longueur de l 'arête	**Aire d'une face**	**Volume du cube**
cube C_1	**3**	**9**	**27**
cube C_2	**6 (× 2)**	**36 (× 2^2)**	**216 (× 2^3)**
cube C_3	**1,5 (× 0,5)**	**2,25 (× $0{,}5^2$)**	**3,375 (× $0{,}5^3$)**
cube C_k	**$3 \times k$**	**$9 \times k^2$**	**$27 \times k^3$**

On dit que le cube $\mathscr{C}_2$ est un **agrandissement** du cube $\mathscr{C}_1$ dans le **rapport d'agrandissement** **2**

et que le cube $\mathscr{C}_3$ est une **réduction** du cube $\mathscr{C}_1$ dans le **rapport de réduction** $\frac{1}{2}$.

Quand on applique une réduction ou un agrandissement de rapport k (k est compris entre 0 et 1 dans une réduction, k est supérieur à 1 pour un agrandissement), on **multiplie** ses dimensions (les **longueurs**) par k
Mais attention, les **aires** sont multipliées par k^2. et les **volumes** par k^3

Exercice n°12 :

On multiplie par 0,9 les dimensions d'un rectangle.

1. Est-ce une réduction ou un agrandissement ? Comme $0,9 < 1$, alors il s'agit d'une réduction.
2. Par quel nombre est multiplié :
   a. son périmètre ? : Son périmètre est multiplié par 0,9
   b. son aire ? : Son aire est multiplié par $(0,9)^2$

Exercice n°13 :

On multiplie par 1,3 le rayon d'un cercle.

1. Est-ce un agrandissement ou une réduction ? : Comme $1,3 > 1$, alors il s'agit d'un agrandissement
2. Par quel nombre est multiplié :
   a. le diamètre ? : Le diamètre est multiplié par 1,3
   b. la longueur du cercle ? : La longueur du cercle est multiplié par 1,3
   c. l'aire du disque ? : L'aire du disque est multipliée par $(1,3)^2 = 1,69$

Exercice n°14 :

Par quel nombre faut-il diviser l'arête d'un cube pour que son volume soit divisé par 125 ? :

On a $\frac{1}{125} = \left(\frac{1}{5}\right)^3$. Il faut donc diviser l'arête d'un cube par 5

Exercice n°15 :

Un plateau de table rectangulaire mesure 60 cm sur 1,10 m. L'épaisseur du plateau est 18 mm.

1. a. Calcule l'aire du plateau, en m² :

Aire = $0,6 \times 1,10 = 0,66$ (m²)

b. Calcule le volume du plateau, en m^3 :

Volume = $0,66 \times 0,018 = 0,01188$ (m^3)

2. On réalise un modèle réduit du plateau (réduction de coefficient 0,75). En utilisant les réponses aux questions **1.a.** et **b.** , calcule :

a. l'aire du plateau réduit :

Aire = $0,66 \times 0,75^2 = 0,37125$ (m²)

b. son volume :

Volume = $0,01188 \times 0,75^3 \approx 0,005$ (m^3)

Exercice n°16 :

a) La pyramide de sommet O et de hauteur OT est une réduction de la pyramide de sommet O et de hauteur OI.

Le rapport de réduction est : $k = \frac{OT}{OI} = \frac{1{,}5}{5} = 0{,}3$

Soit A l'aire de la base ABSR, on a : A = $4^2 = 16$ (cm²)

Soit A ' l'aire de la section , on a : A ' $= k^2 \times$ A $= 0{,}3^2 \times 16 = 1{,}44$

Conclusion : **l'aire de section est 1,44 cm²**

b) On a : A' $= k^2 \times$ A avec A ' = 2,56 cm² et A = 16 cm²

Donc : $k^2 = \frac{A'}{A} = \frac{2{,}56}{16} = 0{,}16$. Et le coefficient de réduction est donc : $k = \sqrt{0{,}16} = 0{,}4$

Ainsi, la distance du sommet au plan est : OI $\times k = 5 \times 0{,}4 = 2$

Conclusion : **Il faut placer le plan à 2 cm du sommet**

c) Cherchons d'abord la hauteur de la pyramide

• Calcul de RB

Dans le triangle ABR rectangle en A (car ABSR est un carré), d'après le théorème de Pythagore, on a :

RB ² = AB ² + AR ²

RB ² = 6 ² + 6 ²

RB ² = 36 + 36

RB ² = 72

RB = $\sqrt{72}$

Conclusion : RB = $\sqrt{72}$ cm

• Calcul de IB

On a : $IB = \frac{RB}{2} = \frac{\sqrt{72}}{2} = \sqrt{\frac{72}{4}} = \sqrt{18}$ Conclusion : IB = $\sqrt{18}$ cm

• Calcul de OI

Dans le triangle AIO rectangle en I, d'après le théorème de Pythagore, on a :

AO ² = AI ² + IO ²

6 ² = $\sqrt{18}$ ² + IO ² (AO = AB car les triangles sont équilatéraux)

IO ² = 36 - 18

IO ² = 18

IO = $\sqrt{18}$

Conclusion : IO = $\sqrt{18}$ cm

• Calcul du coefficient de réduction

On a : A' $= k^2 \times$ A avec A ' = 2 cm² et A = 6 ² = 36 cm²

Donc : $k^2 = \frac{A'}{A} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$. Et le coefficient de réduction est donc : $k = \sqrt{\frac{1}{18}} = \frac{1}{\sqrt{18}}$

• Calcul de la distance au sommet

Ainsi, la distance du sommet au plan est : OI $\times k = \sqrt{18} \times \frac{1}{\sqrt{18}} = 1$

Conclusion : **Il faut placer le plan à 1 cm du sommet**

Exercice n°17 :

a) • Calcul de AS dans le triangle ASU rectangle en U.

Dans le triangle ASU rectangle en U, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$AS^2 = AU^2 + US^2$

$AS^2 = 6^2 + 8^2$

$AS^2 = 36 + 64$

$AS^2 = 100$

$AS = \sqrt{100}$

$AS = 10$

Conclusion : AS = 10 cm

• Calcul du coefficient de réduction

La section d'une pyramide par un plan parallèle à la base est un polygone qui est une réduction du polygone de base.

Donc si A est l'aire de la section réduite, B est l'aire de la base AMU et k le coefficient de réduction, alors $A = k^2 B$.

Et d'après l'énoncé, A = 0,16 B donc $k^2 = 0{,}16$ et ainsi $\boldsymbol{k = 0{,}4}$

• Calcul de OS

On a : $OS = k \times AS = 0{,}4 \times 10 = 4$

Conclusion : **OS = 4 cm**

b) • Calcul de RA

Dans le triangle MAR rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$MR^2 = MA^2 + AR^2$

$5^2 = 3^2 + AR^2$

$AR^2 = 25 - 9$

$AR^2 = 16$

$AR = \sqrt{16}$

$AR = 4$

Conclusion : AR = 4 cm

• Calcul de l'aire du triangle MAR

Soit A l'aire du triangle MAR, on a : $A = \dfrac{MA \times RA}{2} = \dfrac{3 \times 4}{2} = 6$.

Conclusion : l'aire du triangle MAR égale 6 cm²

• Calcul du volume de la pyramide OMAR

Si V est le volume, on a : $V = \dfrac{1}{3}(\text{ aire de la base} \times \text{hauteur }) = \dfrac{A \times OM}{3} = \dfrac{6 \times 6}{3} = 12$

Conclusion : $V = 12\ cm^3$

• Calcul du coefficient de réduction :

soit k le coefficient de réduction, on a : $k = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

• Calcul du volume de la petite pyramide

Soit V ' le volume de la petite pyramide, on a : $V' = \left(\dfrac{1}{3}\right)^3 \times V = \dfrac{1}{27} \times 12 = \dfrac{12}{27} = \dfrac{4}{9}$

Conclusion : **Le volume de la pyramide obtenue est $\dfrac{4}{9}$ cm³**