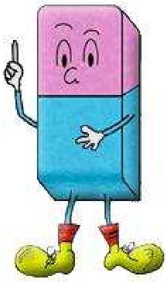


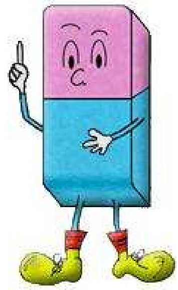
THEME 5

NOMBRES PREMIERS
Fractions irréductibles

* *

A la fin du thème, tu dois savoir :

- Effectuer des opérations sur les nombres en écriture fractionnaire
- Comment trouver tous les diviseurs d'un même nombre
- Comment reconnaitre un nombre premier
- Décomposer un nombre entier positif en produit de facteurs premiers.
- Simplifier une fraction pour la rendre irréductible.



A – RAPPELS SUR LES ECRITURES FRACTIONNAIRES

A – 1 QUOTIENTS EGAUX

Si a , b et k sont non nuls : $\dfrac{a\times k}{b\times k}=\dfrac{a}{b}$.

On peut simplifier l'écriture d'un quotient. *Exemple* : $\dfrac{15}{12}=\dfrac{5\times 3}{4\times 3}=\dfrac{5}{4}$

Critères de divisibilité : comment reconnaître si un nombre entier est divisible par un autre ?

- Examine le dernier chiffre du nombre :
  Si c'est un nombre pair (0 , 2 , 4 , 6 , 8), le nombre est divisible par 2.
  Si c'est 0 ou 5, le nombre est divisible par 5.
  Si c'est 0, le nombre est divisible par 10.
- Additionne tous les chiffres qui ont permis d'écrire le nombre :
  Si la somme trouvée est divisible par 3, le nombre en question est aussi divisible par 3.
  Si la somme trouvée est divisible par 9, le nombre en question est aussi divisible par 9.

A – 2) ADDITION , SOUSTRACTION, MULTIPLICATION, DIVISION

a, b, c et d désignent des nombres positifs avec $b\neq 0$ et $d\neq 0$

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}\quad ;\quad \frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}\quad ;\quad a\times\frac{c}{b}=\frac{a\times c}{b}\quad ;\quad \frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$$

Pour diviser une fraction par une autre fraction, on multiplie la première fraction par l'inverse de la deuxième fraction.

Pour b, c et d non nuls : $\dfrac{a}{b}\div\dfrac{c}{d}=\dfrac{a}{b}\times\dfrac{d}{c}$ ou $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\dfrac{a}{b}\times\dfrac{d}{c}$

Exemples :

$\frac{3}{4}+\frac{5}{4}=\frac{3+5}{4}=\frac{8}{4}=2$; $6+\frac{1}{2}=\frac{12}{2}+\frac{1}{2}=\frac{12+1}{2}=\frac{13}{2}$

$\frac{17}{9}-\frac{2}{9}=\frac{17-2}{9}=\frac{15}{9}=\frac{5\times3}{3\times3}=\frac{4}{3}$ $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}=\frac{10}{15}+\frac{12}{15}=\frac{10+12}{15}=\frac{22}{15}$

$\frac{2}{7}\times\frac{21}{4}=\frac{2\times21}{7\times4}=\frac{2\times3\times7}{7\times2\times2}=\frac{3}{2}$ $4\times\frac{3}{5}=\frac{4\times3}{5}=\frac{12}{5}$

$\frac{4}{7}\div\frac{5}{8}=\frac{4}{7}\times\frac{8}{5}=\frac{4\times8}{7\times5}=\frac{32}{35}$

$\frac{\frac{2}{9}}{\frac{2}{27}}=\frac{2}{9}\div\frac{2}{27}=\frac{2}{9}\times\frac{27}{2}=\frac{2\times9\times3}{9\times2}=3$

B - MULTIPLE - DIVISEUR - NOMBRE PREMIER

B - 1 MULTIPLE - DIVISEUR

Un nombre *b*, non nul, est un **diviseur** d'un nombre *a* lorsqu'il existe un nombre entier *k* , tel que :

a = k × b

On dit que *a* est un **multiple** de *b*

Exemples : 27 est un multiple de 9 car 27 = 9 × 3
6 est un diviseur de 42 car 42 : 6 = 7

Comment trouver tous les diviseurs d'un même nombre :

Exemple : Liste des diviseurs de 56.

Pour dresser la liste des diviseurs, on peut dresser un tableau comme ci-dessous

1	2	4	7
56	28	14	8
1 × 56 = 56	2 × 28 = 56	4 × 14 = 56	7 × 8 = 56

Les diviseurs de 56 sont : 1 – 2 – 4 – 7 – 8 – 14 – 28 – 56

B - 2 NOMBRE PREMIER

• Définition :

Un nombre entier qui n'a pour diviseur que lui-même et le chiffre 1 s'appelle un **nombre premier**

Exemples :

- 83 est un nombre premier car les diviseurs sont : 83 (lui-même)et 1.
- 143 n'est pas un nombre premier car 143 , 11 , 13 et 1 sont des diviseurs de 143.
- 1 n'est pas un nombre premier car il possède un seul diviseur : lui-même
- 0 n'est pas premier car il possède une infinité de diviseurs.

• **Propriété :**

- Il existe une infinité de nombres premiers
- Les 25 nombres premiers inférieurs à 100 sont :
  2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 53 59 61 67 71 73 79 83 89 97

• **Méthode:**

Soit N un entier supérieur ou égal à 2 .
Pour montrer que N est premier, il suffit de montrer que N n'est divisible par aucun nombre premier Inférieur ou égale à $\sqrt{N}$

Méthode 2: Comment reconnaitre un nombre premier

Enoncé : **1.** 178 est-il un nombre premier ?
2. 157 est-il un nombre premier ?

Solution :

1. On remarque que 178 se termine par le chiffre 8.

178 est un nombre pair et donc divisible par 2

Conclusion : 178 n'est pas un nombre premier.

2. On a : $\sqrt{157} \approx 12{,}5$

On va donc tester la divisibilité de 157 par tous les nombres premiers entre 2 et 12, c'est-à-dire par 2, par 3, par 5, par 7 et par 11.

$\rightarrow$ 157 est impair donc pas divisible par 2

$\rightarrow$ 1 + 5 + 7 = 11, donc 157 n'est pas divisible par 3

$\rightarrow$ 157 ne se termine pas par 5, donc il n'est pas divisible par 5

$\rightarrow$ 157 ÷ 7 donne quotient 22 et reste 3 dans la division euclidienne.
Le reste n'étant pas égal à 0, 157 n'est pas divisible par 7.

$\rightarrow$ 157 ÷ 11 donne quotient 14 et reste 3 dans la division euclidienne.
Le reste n'étant pas égal à 0, 157 n'est pas divisible par 11.

Conclusion : 157 est un nombre premier

B - 3 DECOMPOSER EN PRODUIT DE NOMBRES PREMIERS

Tout nombre entier supérieur ou égal à 2 peut se décomposer en produit de facteurs premiers.

Exemples : $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^3 \times 3$

$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3 \times 5$

Méthode 4: Décomposer un nombre entier positif en produit de facteurs premiers.

Enoncé : Décomposer le nombre 120 en un produit de nombres premiers.

Solution :

120	2	120 est pair donc divisible par 2. On a : $120 = 2 \times 60$
60	2	60 est pair donc divisible par 2. On a : $60 = 2 \times 30$
30	2	30 est pair donc divisible par 2. On a : $30 = 2 \times 15$
15	5	15 est divisible par 3. On a : $15 = 3 \times 5$
5	5	5 est divisible par 5. On a : $5 = 5 \times 1$
1		1 n'est pas divisible par un nom premier. On a donc terminé.

Conclusion : $120 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 = 2^3 \times 3 \times 5$

C – FRACTION IRREDUCTIBLE

Une fraction est dite irréductible lorsque le numérateur et le dénominateur n'ont pas de diviseur commun autre que 1.

Méthode 5: Simplifier une fraction pour la rendre irréductible.

Enoncé : Rendre irréductible la $\frac{30}{80}$

Solution :

La décomposition en produit de facteurs premiers permet de simplifier et de rendre irréductible une fraction

$$\frac{30}{80} = \frac{2\times3\times5}{2\times2\times3\times7} = \frac{5}{2\times7} = \frac{5}{14}$$

Objectif brevet : *Extrait session septembre 2013 – exercice n°7 (Affirmation 1)*

L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ?
Dans un club sportif, les trois quarts des adhérents sont mineurs et le tiers des adhérents majeurs a plus de 25 ans. Un adhérent sur six a donc entre 18 ans et 25 ans.

L'affirmation est vraie

Les trois quart des adhérents sont mineurs donc $\frac{1}{4}$ des adhérents sont majeurs: $1-\frac{3}{4} = \frac{4}{4}-\frac{3}{4} = \frac{4-3}{4} = \frac{1}{4}$

Le tiers des adhérents majeurs a plus de 25 ans donc $\frac{2}{3}$ des adhérents majeurs ont entre 18 ans et 25 ans : $1-\frac{1}{3} = \frac{3}{3}-\frac{1}{3} = \frac{3-1}{3} = \frac{2}{3}$

Soit : $\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$

Conclusion : Un adhérent sur six a donc entre 18 ans et 25 ans.

Autre méthode : $1-\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\right)=1-\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{12}\right)=\frac{12}{12}-\left(\frac{9}{12}+\frac{1}{12}\right)=\frac{12-10}{12}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$