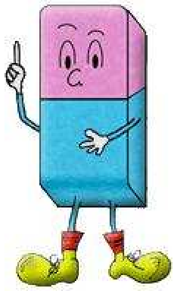
THEME 18 : GEOMETRIE DE L'ESPACE (2)
MODELISER UNE SITUATION SPATIALE - Section TRANFORMATIONS
EFFET D'UN AGRANDISSEMENT – REDUCTION

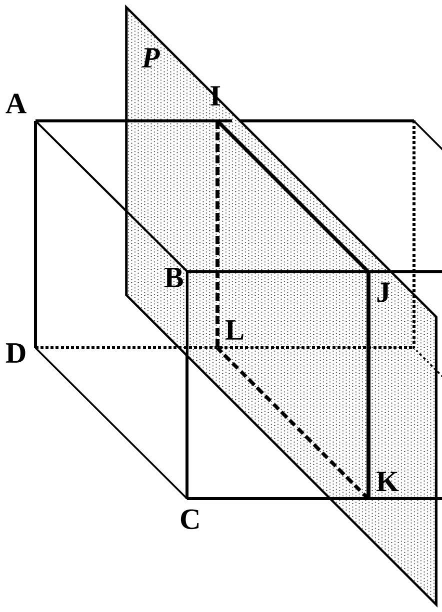
A la fin du thème, tu dois savoir :



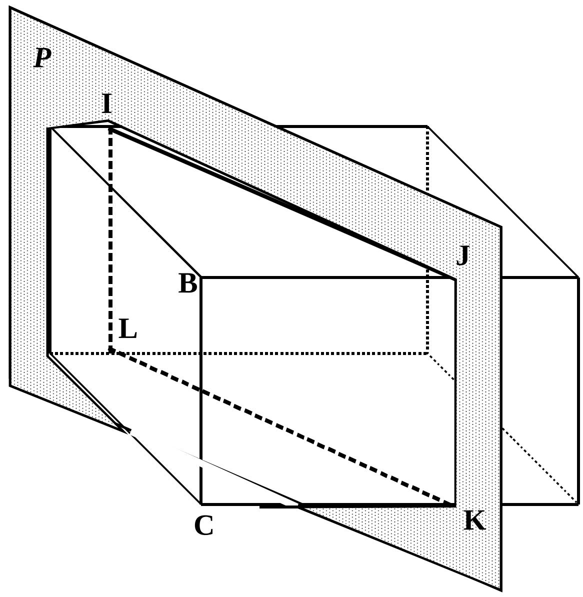
☞ Dessiner et calculer l'aire d'une section d'un pavé droit par un plan .
☞ Calculer les dimensions de la section d'un cylindre par un plan.
☞ Calculer le volume d'un cône « réduit »
☞ Comment calculer le rayon de la section d'une sphère par un plan.
☞ Représenter la section d'un prisme droit par un plan avec Geogebra.
☞ Agrandissement - Réduction
☞ Comprendre les effets d'un agrandissement ou d'une réduction sur les longueurs et les angles
☞ Comprendre les effets d'un agrandissement ou d'une réduction sur les Aires et les volumes
☞ Comprendre l'effet d'une homothétie sur une figure
☞ Trouver le coefficient d'agrandissement ou de réduction.

A - SECTIONS D'UN PAVE DROIT PAR UN PLAN

La section d'un pavé droit par un plan (P) parallèle à une face est ………………………...
La section d'un pavé droit par un plan (P) parallèle à une arête est ………………………..



Le plan *P* est parallèle à la face ABCD.
IJKL est ……………………….

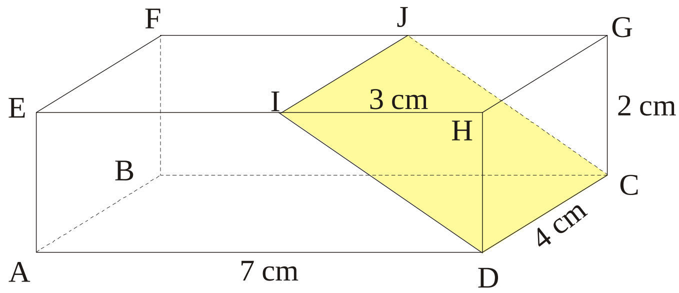


Le plan *P* est parallèle à l'arête [BC].
IJKL est ……………………………..

<u>Méthode 1</u>: Dessiner et calculer l'aire d'une section d'un pavé droit par un plan .

<u>Enoncé :</u>
ABCDEFGH est un pavé droit que l'on a coupé par un plan parallèle à l'arête [GH], avec IH = 3 cm.

1. Quelle est la nature de la section IJCD ?
2. Dessine-la en vraie grandeur.
3. Calcule son aire, puis arrondis-la au mm^2 près.



<u>Solution :</u>

1. <u>Nature de la section IJCD</u>

Sachant que la section d'un pavé droit par un plan parallèle à une arête est un rectangle, alors ………… ……………………………………

2. <u>Dessin en vraie grandeur de la section</u>

On commence par construire le triangle IHD (ce qui permettra de reporter la longueur ID), puis le rectangle IJCD.

3. <u>Calcul de l'aire de la section</u>

<u>Calculons d'abord la longueur du côté [ID]</u>
Comme EHDA est un rectangle car le solide ABCDEFGH est un pavé, alors le triangle IHD est rectangle en H.
D'après le théorème de ………………., on a :

ID^2 = ………………………….

ID^2 = ………………………….

ID^2 = ………………………….

ID^2 = ……….

ID = ……….

ID ≈ ……….

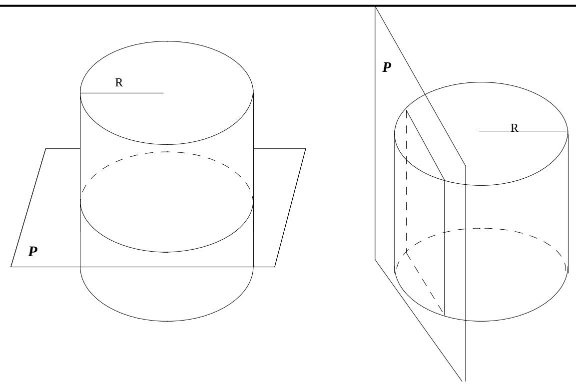
Donc : ID = ………….. cm ou ID ≈ …………. cm

L'aire de la section est donc égale à …… × …….. = ….. ×……. ≈ …… × …….. ≈ ……….

Conclusion : ……………………………………………………………….

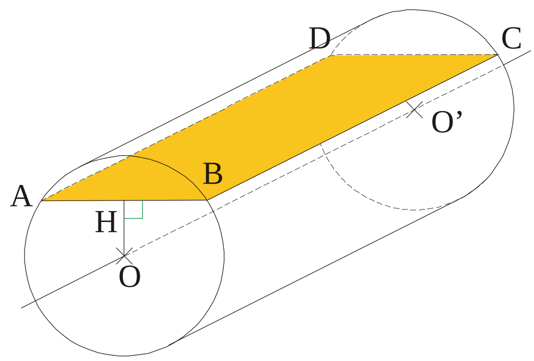
B - SECTIONS D'UN CYLINDRE PAR UN PLAN

La section d'un cylindre de rayon *R* par un plan (*P*) perpendiculaire à l'axe est un ……………………… dont le centre appartient à l'axe.
La section d'un cylindre par un plan (*P*) parallèle à l'axe est un ………………………….



Méthode 2: Calculer les dimensions de la section d'un cylindre par un plan.

Enoncé :
On coupe un cylindre par un plan P parallèle à son axe OO'.
La hauteur du cylindre est 15 cm, sa base a pour rayon 7 cm.
La distance de O au plan P est OH = 3 cm.



1. Quelle est la nature de la section ABCD ?
2. Calcule ses dimensions.

Solution :

1. Nature de la section ABCD.

Sachant que la section d'un cylindre par un plan parallèle à l'axe est un rectangle, alors ………………..
………………………………………..

2. Dimensions de la section ABCD

BC est égale à la hauteur du cylindre soit 15 cm.
Calcul de AB
Dans le triangle OHB rectangle en H, d'après le théorème de …………………., on a :

OB^2 = ………………………..

.... = ……… + HB^2

….. = …….. + HB^2

HB^2 = …………….

HB^2 = …………….

HB = ……………….

Comme OA = OB (car il s'agit de deux ……… d'un même cercle), alors le triangle OAB est ………….. en H

et donc la hauteur est aussi la …………………..

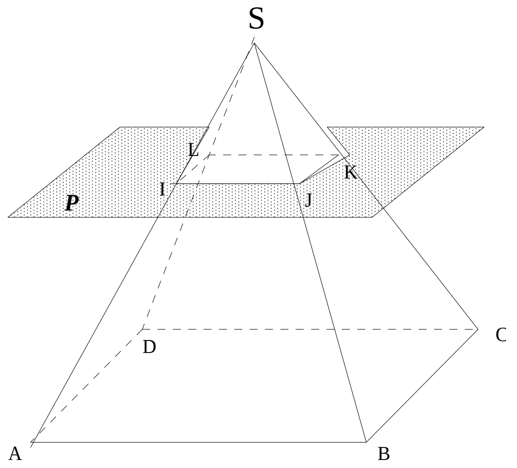
Ainsi H est le …………….. de [AB] et donc AB = ……. × …….

Conclusion : **……………………………………………………..**

C - SECTION D'UNE PYRAMIDE ET D'UN CONE

C – 1 LA PYRAMIDE

La section d'une pyramide par un plan parallèle à la base est un polygone qui est une ……………… **du polygone de base.**

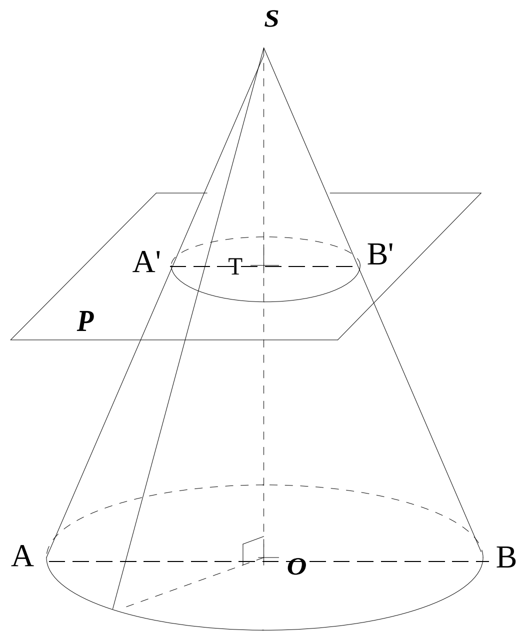


La pyramide SIJKL est une ………………….
de la pyramide SABCD.

De même, la grande pyramide est un
………………………… de la petite pyramide.

C – 2 LE CONE

La section d'un cône de révolution par un plan parallèle à la base est ………………… **qui est une réduction du disque de base.**



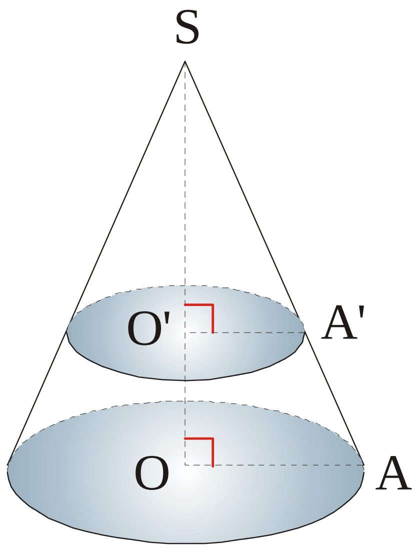
Le cône de sommet S et de base le disque de diamètre [A'B'] est une ………………………….. du cône de sommet S et de base le disque de diamètre [AB].

De même, la grand cône est un …………………………
du petit cône.

Méthode 3: Calculer le volume d'un cône « réduit »

Enoncé :

On a représenté un cône et une section parallèle à la base.
SO = 72 cm et SO' = 36 cm.
Le rayon [O'A'] de la section mesure 24 cm.



1. Calcule le rayon OA de la base du cône.
2. Calcule le volume V_1 du grand cône, puis le volume V_2 du petit cône.

Solution

1. Calcul du rayon OA

Sachant que **la section du cône est parallèle à la base alors** les droites (O'A') et (OA) sont …………………

De plus les droites (O'O) et (A'A) sont ……………………… en …..

D'après le théorème de ………………, on a : $\frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$

D'où $\frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \frac{\ldots\ldots}{OA}$ soit $OA = \frac{\ldots\ldots \times \ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \ldots\ldots$

Conclusion : ………………

2. Calcul du volume V_1 du grand cône

Le volume d'un cône est définie par $\frac{1}{3} \times \text{aire de la base} \times \text{hauteur}$

On a : $V_1 = \frac{1}{3} \times \pi \times \ldots\ldots^2 \times \ldots\ldots = \frac{1}{3} \times \pi \times \ldots\ldots^2 \times \ldots\ldots = \ldots\ldots$

Conclusion : ……………………………………

Calcul du volume V_2 du petit cône

Le volume d'un cône est définie par $\frac{1}{3} \times \text{aire de la base} \times \text{hauteur}$

On a : $V_2 = \frac{1}{3} \times \pi \times \ldots\ldots^2 \times \ldots\ldots = \frac{1}{3} \times \pi \times \ldots\ldots^2 \times \ldots\ldots = \ldots\ldots$

Conclusion : ……………………………………

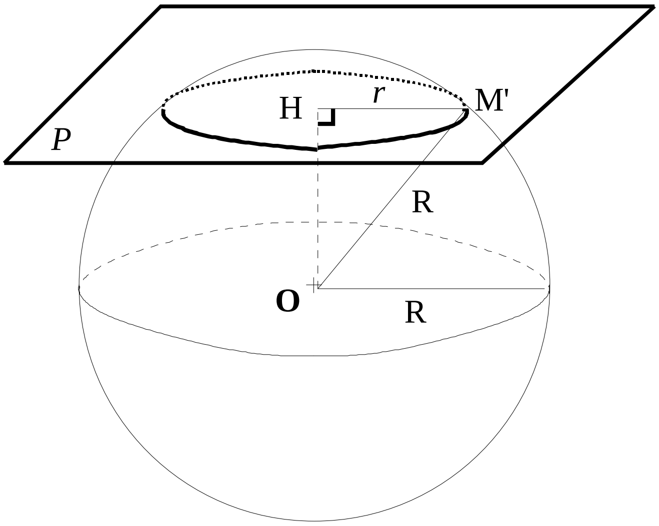
D - SECTION D'UNE SPHERE PAR UN PLAN

La section d'une sphère par un plan est un …………

La section de la sphère de centre O et de rayon R par le plan *P* est le cercle :

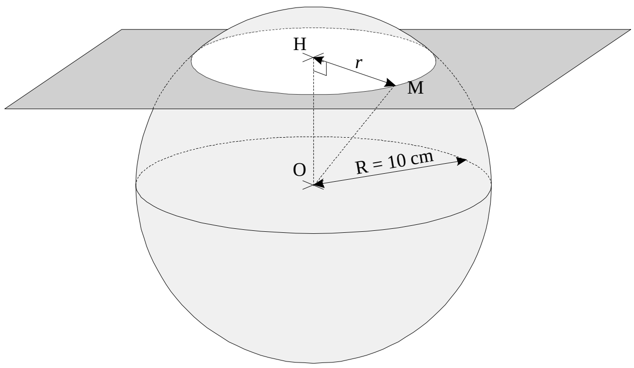
- **de centre H**, H étant le point d'intersection du plan *P* et de la droite perpendiculaire à *P* passant par O ;
- **de rayon**

$r = \sqrt{\text{..................................}}$



Méthode 4 : Comment calculer le rayon de la section d'une sphère par un plan.

Exemple : On sectionne une sphère de rayon R = 10 cm par un plan situé à une distance h = 8 cm de O.
Calculer le rayon r.



……………………………………………………………

……………………………………………………………

……………………………………………………………

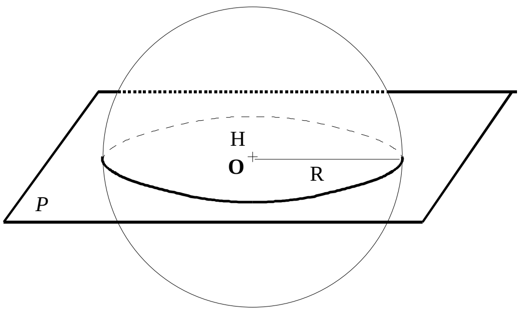
……………………………………………………………

……………………………………………………………

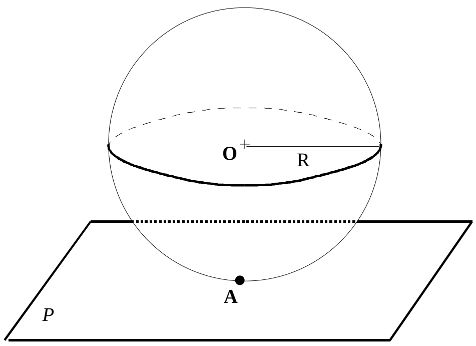
……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

CAS PARTICULIERS

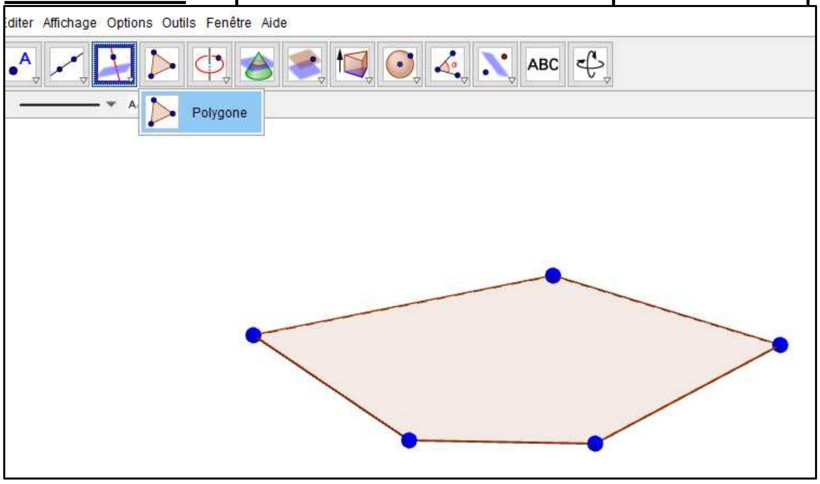


1. Le plan passe par le centre de la sphère : H et O sont confondus et la section est un …………………….



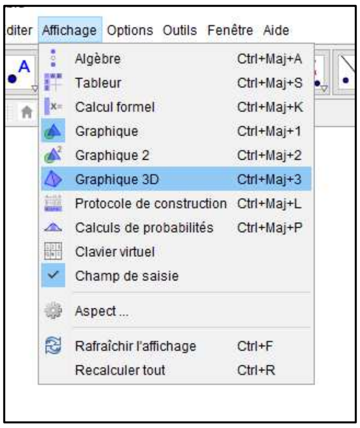
2. OH = R : la sphère et le plan n'ont qu'un seul point commun, A.
   Le plan est ……………………… à la sphère au point A.

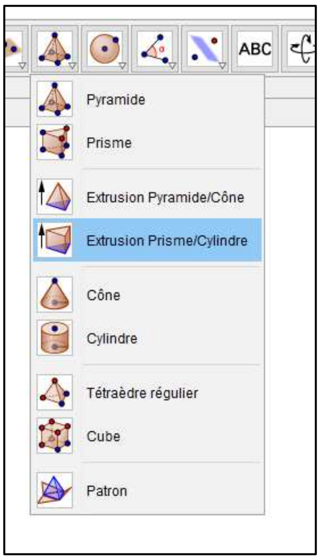
Méthode 5 : Représenter la section d'un prisme droit par un plan avec Geogebra.



Etape 1 :

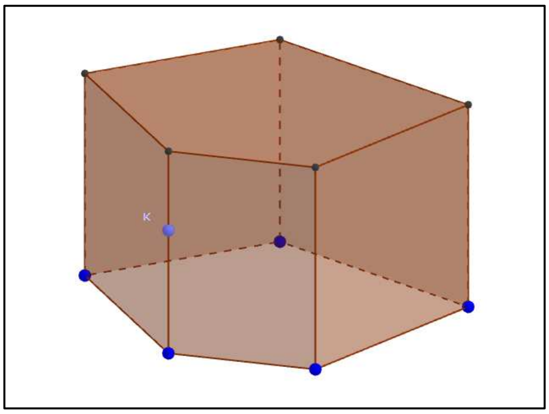
Créé un pentagone
Utiliser l'icône

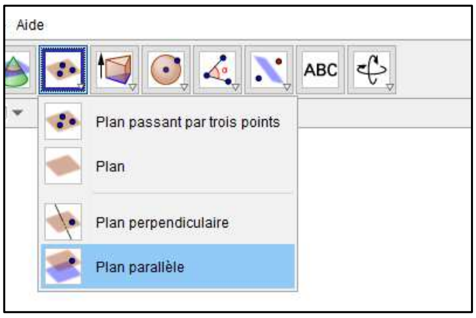




Etape 2 :

Cliquer sur Graphique 3D, puis sur Extrusion Prisme/Cylindre.
Créer le prisme droit en prenant comme hauteur 5 cm par exemple.
Placer ensuite un point K sur une arête.

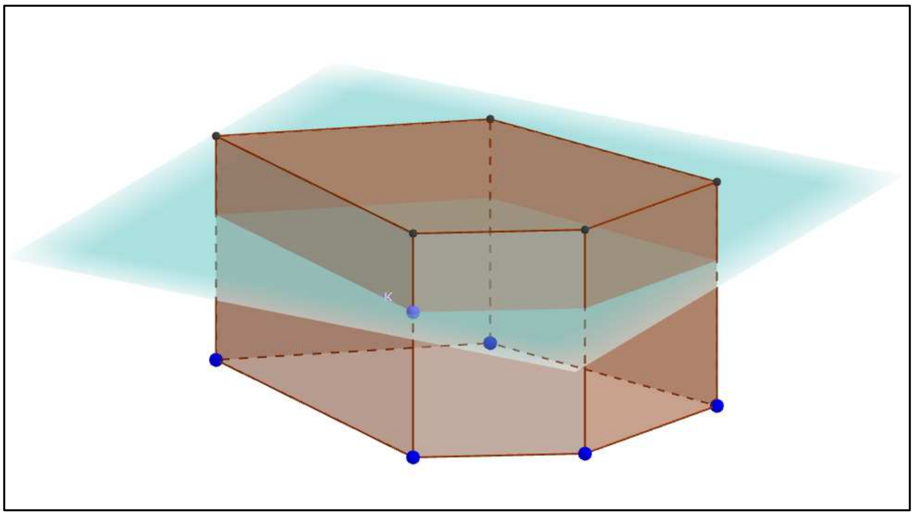




Etape 3 :

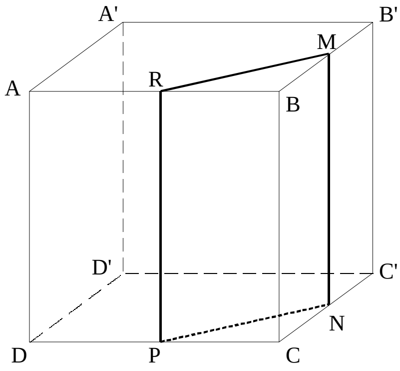
Créer le Plan P passant par K et parallèle à la base du prisme droit.
Cliquer sur l'icône Plan parallèle.
Cliquer pour terminer sur l'icône

Puis sur le plan P et sur le prisme droit afin de créer la section.



Objectif Brevet : *Extrait session novembre 2009 –Amérique du Sud*

Le cube représenté ci-après est un cube d'arête 6 cm.
La figure n'est pas aux dimensions réelles.
On considère :
Le point M milieu de l'arête [BB']
Le point N milieu de l'arête [CC']
Le point P milieu de l'arête [DC]
Le point R milieu de l'arête [AB]



1. Quelle est la nature du triangle ERM ?
Construire ce triangle en vraie grandeur.
Calculer la valeur exacte de RM

……

……

……

……

……

……

……

……

2. On coupe le cube par le plan passant par R et parallèle à l'arête [BC]. La section est le quadrilatère RMNP.
Quelle est la nature de la section RMNP ? Construire RMNP en vraie grandeur.
Donner ses dimensions exactes.

……

……

……

……

……

3. Calculer l'aire du triangle RBM.
Calculer le volume du prime droit de base le triangle RBM et de hauteur [BC].

……

……

……

……

Objectif Brevet : *Extrait session mars2011 – Nouvelle-Calédonie*

1. Calculer la valeur arrondie au cm^3, du volume d'une boule de rayon R = 7 cm.

………

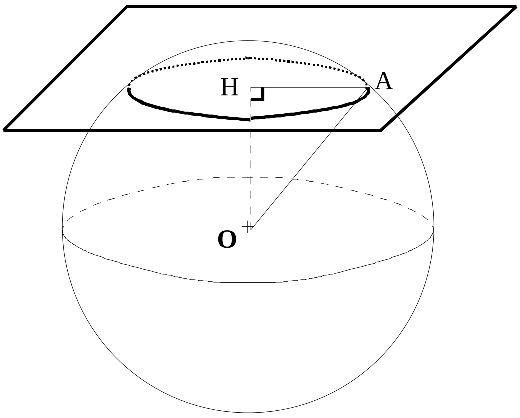
………

………

………

………

2. On réalise la section de la sphère de centre O et de rayon OA = 7 cm, par un plan représenté ci-après. Quelle est la nature de cette section ?



………

………

3. Calculer la valeur exacte du rayon AH de cette section sachant que OH = 4 cm.

………

………

………

………

………

………

………

………

E - AGRANDISSEMENT - REDUCTION

Définition

On dit qu'un objet est un …………………. ou une ………………. d'un autre objet lorsque leurs longueurs sont proportionnelles.

Le coefficient de proportionnalité est alors appelé ……………………………………………..ou ………………………………………………….suivant le cas.

Le coefficient d'agrandissement ou de réduction est ……………………………………… qu'on appellera ***k***

Propriétés

Si ***k* > 1 ,** il s'agit ……………………………………………**.**

Si ***k* < 1 ,** il s'agit ……………………………………………

Si ***k* = 1 ,** il s'agit ……………………………………………………
(les deux objets ont les mêmes dimensions).

F - EFFETS SUR LES LONGUEURS ET LES ANGLES

Propriétés

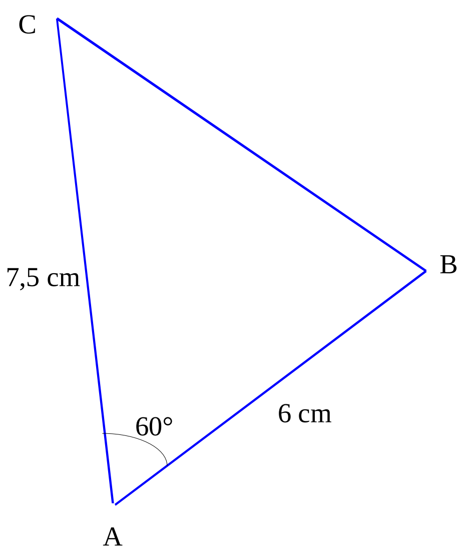
Dans un agrandissement ou une réduction dans le rapport *k* :

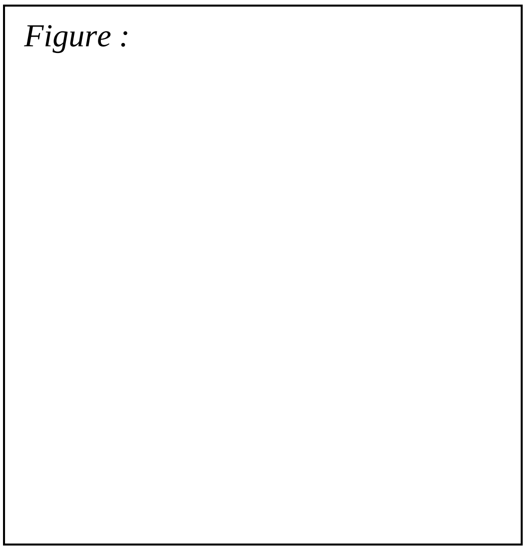
→ Les longueurs sont toutes …………………………………………….. .

→ Les mesures des angles sont ……………………………………………………

Méthode 6: Trouver le coefficient d'agrandissement ou de réduction et représenter la figure obtenue.

On souhaite réaliser une réduction du triangle ABC de telle sorte que le côté du triangle réduis correspondant au côté [AB] ait pour longueur A'B' = 2cm.





Etape 1 : On calcule le coefficient de réduction : $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{.....}{.....} = \dfrac{.....}{.....}$

Etape 2 : On applique ce coefficient de réduction au côté [AC] : A'C' = ...$\times\dfrac{.....}{.....}$ = …….. (cm)

Etape 3 : On fait la construction du triangle A'B'C' sachant que dans une réduction, les angles sont conservés.

G - EFFETS SUR LES AIRES ET LES VOLUMES

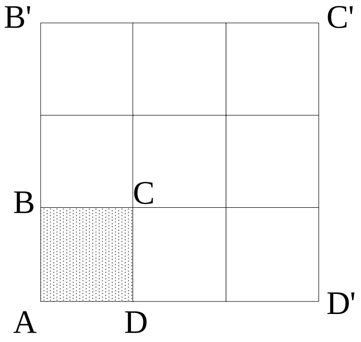
Propriétés

Si, au cours d'un agrandissement ou d'une réduction, les dimensions d'une figure sont toutes multipliées par un même nombre k , alors :

→ les aires sont multipliées par ……

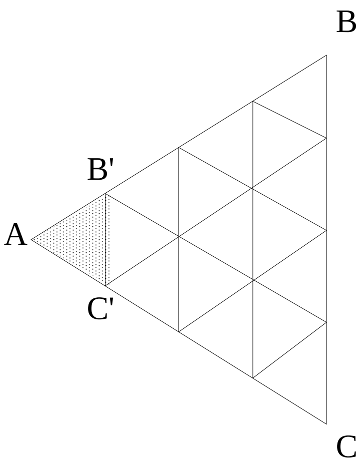
→ les volumes sont multipliés par ……….

Exemples :



Le carré AB'C'D' s'obtient en multipliant par 3 le côté du carré ABCD, donc :

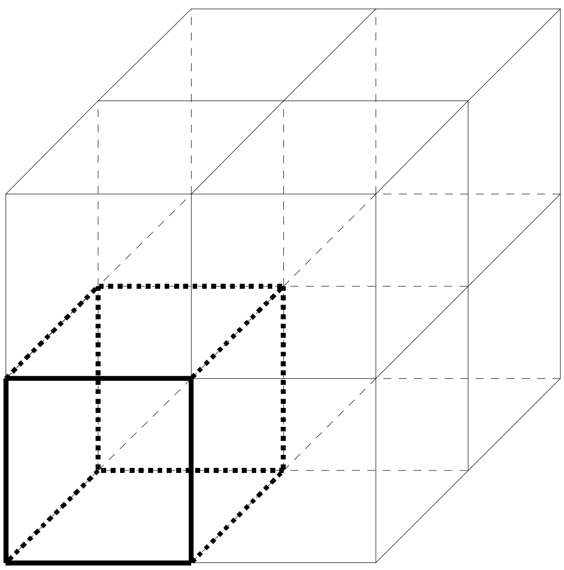
Aire (AB'C'D') = ……. $\times$ aire (ABCD)
= …… $\times$ aire (ABCD)



Le triangle AB'C' s'obtient en multipliant par $\frac{1}{4}$ les côtés du triangle ABC, donc :

Aire (AB'C') = ………. $\times$ aire (ABC

= ……... $\times$ aire (ABC)



Le grand cube s'obtient en multipliant par 2 le côté du petit cube, donc :

Volume (grand cube) = …… $\times$ volume (petit cube)

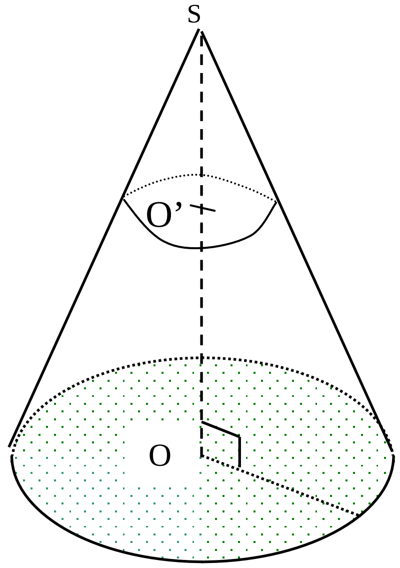
Volume (grand cube) = …… $\times$ volume (petit cube)

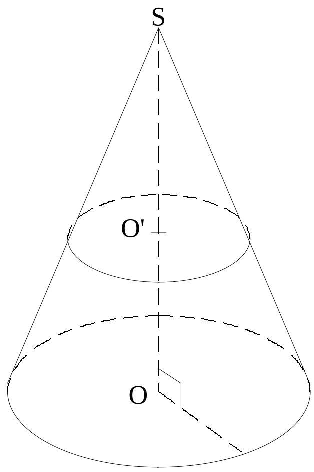
Méthode 7: Déterminer un coefficient de réduction l'utiliser pour calculer une aire ou un volume

Enoncé :

On réalise la section d'un cône de hauteur OS = 6 cm par un plan parallèle à la base tel que SO' = 2 cm.
On donne le volume du grand cône : V = 43,2 cm ^{3}
Et l'aire de la base A = 21,6 cm².

1. Quelle est la nature de la section ?
2. Calculer le volume V' du petit cône et l'aire A' de sa base.





Solution :

1. La section obtenue est ……………………. de centre O'.
En effet, ……………………………………………………………………………………………
……
…….

2. Le cône de sommet S et de hauteur SO' est une réduction du cône de sommet S et de hauteur OS.

Le coefficient de réduction est : k = ………………………….

Le petit cône étant une réduction du grand cône dans le rapport ………, donc :

…………………………………………………………………….

Le volume du petit cône est ……… cm^{3}.

…………………………………………………………………………

L'aire du petit cône est ……. cm².

H - EFFETS D'UNE HOMOTHETIE SUR UNE FIGURE

Effectuer une homothétie de rapport k revient à faire un agrandissement ou une réduction de coefficient k .
Par une homothétie de rapport k :

→ **Les mesures des angles** sont …………………………

→ **Les dimensions** sont ………………………………………...

→ **Les aires** sont ……………………………………………..

→ **Les volumes** ………………………………………………..