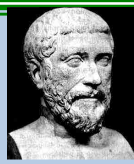
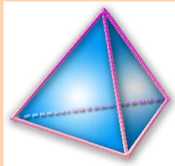
Thème N°12 : TRIANGLE RECTANGLE (2)
Réciproque du théorème de Pythagore



<u>A la fin du thème, tu dois savoir</u> :
- Réciproque du théorème de Pythagore.
- Prouver qu'un triangle est rectangle.



Exercice n°1: **a)** Trace un triangle RST tel que : RS = 6 cm, RT = 8 cm et ST = 10 cm.
b) Voilà ce qu'a écrit Sophie pour prouver que le triangle RST est rectangle :

Calculs mal présentés

$ST^2 \cancel{=} RS^2 + RT^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$

$ST \cancel{=} \sqrt{100} = 10$, donc le triangle RST est bien rectangle en R *théorème ?*

Pourquoi le professeur a-t-il barré les signes égal et écrit dans la marge « calculs mal présentés ? »
On doit séparer les calculs :
- *Longueur du côté le plus grand au carré*
- *Somme des carrés des deux autres côtés*

Ne pas oublier pour prouver que le triangle est rectangle de citer « d'après la réciproque du théorème de Pythagore ».
c) Rédige correctement la réponse.

Dans le triangle RST, on a : ST ² = 10 ² = 100

RS ² + RT ² = 6 ² + 8 ² = 36 + 64 = 100

On constate que : **ST ² = RS ² + RT ²**
Alors, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle RST est rectangle en R.

Conclusion : le triangle RST est rectangle en R.

Exercice n°2: **a)** Construis un triangle SEL tel que SE = 7,5 cm, EL = 4 cm et LS = 8,5 cm.
b) Démontre que le triangle SEL est rectangle.

Dans le triangle SEL, on a : LS ² = 8,5 ² = 72,25

SE ² + EL ² = 7,5 ² + 4 ² = 56,25 + 16 = 72,25

On constate que : **LS ² = ES ² + EL ²**
Alors, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle RST est rectangle en R.

Conclusion : le triangle SEL est rectangle en E.

Exercice n°3: **1.** On considère le triangle LMN tel que : LM = 9,9 cm, MN = 16,5 cm et LN = 13,2 cm.
Ce triangle est-il rectangle ?

Dans le triangle LMN, on a : $MN^2 = 16{,}2^2 = 272{,}25$

$$LM^2 + LN^2 = 9{,}9^2 + 13{,}2^2 = 98{,}01 + 174{,}24 = 272{,}25$$

On constate que : **$MN^2 = LM^2 + LN^2$**
Alors, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle RST est rectangle en R.

Conclusion : le triangle LMN est rectangle en L.

2. On considère le triangle IJK tel que : IJ = 10 cm , JK = 13 cm et IK = 16 cm.
Ce triangle est-il rectangle ?

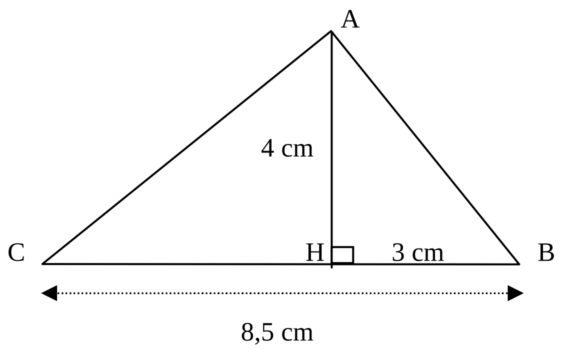
Dans le triangle IJK, on a : $IK^2 = 16^2 = 256$

$$IJ^2 + JK^2 = 10^2 + 13^2 = 100 + 169 = 269$$

On constate que : **$IK^2 \neq IJ^2 + JK^2$**
L'égalité de Pythagore n'est donc pas vérifiée

Conclusion : le triangle ABC n'est pas rectangle.

Exercice n°4: Un tel triangle peut-il être rectangle en A ?



Avant de travailler dans le triangle ABC, il faut connaitre les longueurs AC et AB

• Calcul de CA
Le triangle ACH est rectangle en H. On a donc, d'après le théorème de Pythagore :

$AC^2 = AH^2 + AH^2$
$AC^2 = (8{,}5 - 3)^2 + 4^2$
$AC^2 = 6{,}25 + 16$
$AC^2 = 22{,}25$
$AC = \sqrt{22{,}25}$

Conclusion : $AC = \sqrt{22{,}25}$ cm

• Calcul de AB

Le triangle ABH est rectangle en H. On a donc, d'après le théorème de Pythagore :

$AB^2 = AH^2 + BH^2$
$AB^2 = 4^2 + 3^2$
$AB^2 = 16 + 9$
$AB^2 = 25$
$AB = \sqrt{25}$
$AB = 5$

Conclusion : AB = 5 cm

• Nature du triangle ABC

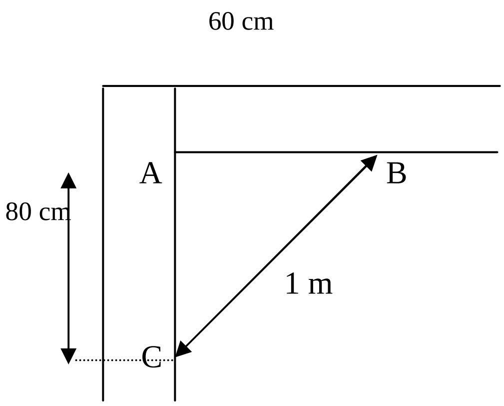
Dans le triangle IJK, on a : $CB^2 = 8{,}5^2 = 72{,}25$

$AC^2 + AB^2 = \sqrt{22{,}25}^{\,2} + 5^2 = 22{,}5 + 25 = 47{,}5$

On constate que : **$CB^2 \neq AC^2 + AB^2$**
L'égalité de Pythagore n'est donc pas vérifiée

Conclusion : le triangle ABC n'est pas rectangle.

Exercice n°5:



Pour vérifier que 2 montants d'une porte sont bien
Perpendiculaires, un menuisier mesure 60 cm sur
Un montant et 80 cm sur l'autre. Il mesure la
Distance entre les 2 traits obtenus et trouve 1 m.
Il est satisfait de son travail.

A-t-il raison ?

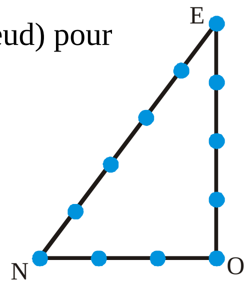
CB = 1 m = 100 cm
Dans le triangle ABC, on a : $CB^2 = 100^2 = 10\,000$
et $AC^2 + AB^2 = 80^2 + 60^2 = 6\,400 + 3\,600 = 10\,000$

On constate que : $CB^2 = AC^2 + AB^2$
Alors, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A.

Conclusion : Le menuisier peut-être satisfait.

Exercice n°6 :

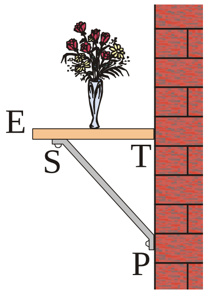
En Mésopotamie, pendant l'antiquité on utilisait des cordes à nœuds (avec 1 m entre chaque nœud) pour obtenir des angles droits dans les constructions d'autels religieux.
Explique pourquoi cette corde à nœuds bien tendue donne un angle droit.



Dans le triangle ONE, on a : $NE^2 = 5^2 = 25$
et $NO^2 + OE^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$

On constate que : $NE^2 = NO^2 + OE^2$
Alors, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle NOE est rectangle en O.

Conclusion : le triangle NOE est rectangle en O.



Exercice n°7 :

On a fixé au mur une étagère [ET] en la soutenant par un support [SP].
ST = 17,6 cm TP = 33 cm SP = 37,4 cm.
On suppose que le mur est vertical.
L'étagère est-elle horizontale ?

Dans le triangle STP rectangle en T, on a : $SP^2 = 37{,}4^2 = 1\,398{,}76$
Et $ST^2 + TP^2 = 17{,}6^2 + 33^2 = 1\,398{,}76$
On constate que : $SP^2 = ST^2 + TP^2$
Alors, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle STP est rectangle en T.

Conclusion : l'étagère est horizontale.

Exercice n°8 :

1. ABD est un triangle rectangle en D.

   D'après le théorème de Pythagore, on a :

$$AB^2 = AD^2 + BD^2$$
$$5^2 = 4^2 + BD^2$$
$$25 = 16 + BD^2$$
$$BD^2 = 25 - 16$$
$$BD^2 = 9$$
$$BD = \sqrt{9}$$
$$BD = 3\ m.$$

La hauteur du mur est bien de 3m.

2. CBD est un triangle rectangle en D.

   D'après le théorème de Pythagore, on a :

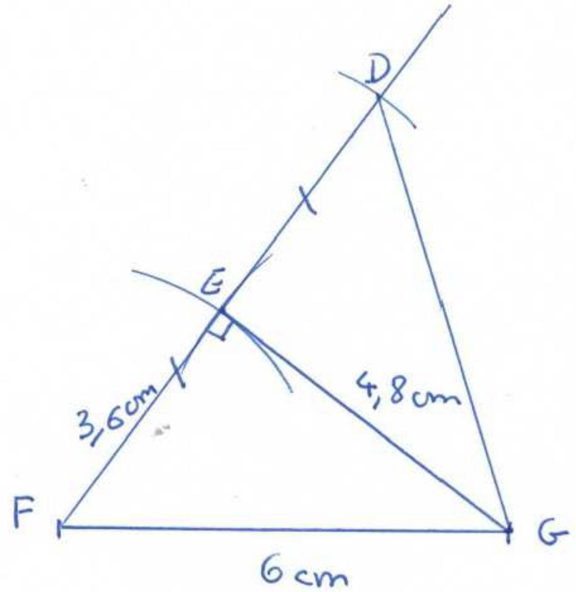
$$CB^2 = CD^2 + BD^2$$
$$CB^2 = 6^2 + 3^2$$
$$CB^2 = 36 + 9$$
$$CB^2 = 45$$
$$CB = \sqrt{45}$$
$$CB \approx 6{,}7\ m.$$

$$AB + BC \approx 5 + 6{,}7 \approx 11{,}7$$

La hauteur de l'arbre était d'environ 11,7 m.

Exercice n°9 :

1. Construis un triangle EFG tel que : EF = 3,6 cm, EG = 4,8 cm et FG = 6 cm ?
2. Démontre que le triangle EFG est un triangle rectangle.
3. Construis le point D, symétrique du point F par rapport à E.
4. Calcule l'aire du triangle FGD.



2. Dans le triangle EFG, on a : $FG^2 = 6^2 = 36$

$$EF^2 + EG^2 = 3,6^2 + 4,8^2 = 12,96 + 23,04 = 36$$

On constate que : **$FG^2 = EF^2 + EG^2$**
Alors, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle EFG est rectangle en E.

Conclusion : le triangle EFG est rectangle en E.

4. Aire (FGD) = $\dfrac{FD \times EG}{2} = \dfrac{(2\times 3,6)\times 4,8}{2} = 17,28$

Conclusion : L'aire du triangle FGD est égale à 17,28 cm²