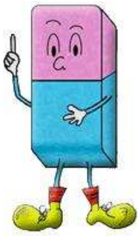
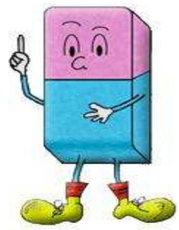


3-EME

Thème N°15 : PUISSANCE D'UN NOMBRE
Puissance d'un nombre avec exposant entier positif

A la fin du thème, tu dois savoir :

- Savoir calculer une expression en utilisant les priorités opératoire
- Savoir écrire un nombre en notation scientifique
- Utiliser les règles de calculs sur les puissances
- Comment organiser un calcul avec des puissances
- Connaitre les préfixes et savoir les utiliser avec les puissances de dix pour convertir.



A - PUISSANCE D'EXPOSANT ENTIER POSITIF

Définition :

Si n est un entier supérieur ou égal à 2, alors : $a^n = \underbrace{a \times a \times a \times a \times .... \times a}_{n \text{ facteurs}}$

De plus , $a^1 = a$ et pour $a \neq 0$, $a^0 = 1$

Vocabulaire : a^n se lit « a exposant n » ou « a puissance n »

Exemples :

$5^4 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$; $(-6)^3 = (-6) \times (-6) \times (-6) = -216$

$3^9 = 19\ 683$ $(-3)^0 = 1$ $(5,7)^1 = 5,7$

B - AVEC LA CALCULATRICE

Avec la Casio 2D, on utilise la touche $x^{\blacksquare}$ et avec la TI-Collège, la touche $\wedge$, ou ……

Exemple : Calcule de $(-7)^5$

Casio 2D : $\boxed{(}$ $\boxed{(-)}$ $\boxed{7}$ $\boxed{)}$ $\boxed{x^{\blacksquare}}$ $\boxed{5}$ $\boxed{\text{EXE}}$ $-16\ 807$

TI-Collège : : $\boxed{(}$ $\boxed{(-)}$ $\boxed{7}$ $\boxed{)}$ $\boxed{\wedge}$ $\boxed{5}$ $\boxed{\text{ENTER}}$ $-16\ 807$

C - PRIORITES OPERATOIRES

- Dans une expression sans parenthèses, on effectue d'abord les puissances, puis les multiplications et les divisions, enfin les additions et les soustractions.
- Dans une expression avec parenthèses, on effectue d'abord les calculs entre les parenthèses.

Méthode : Savoir donner l'écriture décimale d'un nombre

Exemple 1 : Donne l'écriture décimale des nombres $A = 4^2 \times 4^3$ et $B = \dfrac{5^3}{5^5}$.

$A = 4^2 \times 4^3 = (4 \times 4) \times (4 \times 4 \times 4) = 4^5 = 1\,024$

$B = \dfrac{5^3}{5^5} = \dfrac{5\times5\times5}{5\times5\times5\times5\times5} = \dfrac{1}{5\times5} = \dfrac{1}{25} = 0{,}04$

Exemple 2 : Donne l'écriture décimale du nombre $C = 6^3 + 126 \times 3^2 - 8$

$C = 6^3 + 126 \times 3^2 - 8$

$C = 216 + 126 \times 9 - 8$ ☞ On effectue d'abord les puissances

$C = 216 + 126 \times 9 - 8$ ☞ On effectue la multiplication

$C = 216 + 1\,134 - 8$ ☞ On effectue un calcul de la gauche vers la droite

$C = 1\,342$

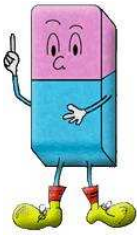
Exemple 3 : Donne l'écriture décimale du nombre $D = (5-2)^3 - (6 \times 2)^2$

$D = (5-2)^3 - (6 \times 2)^2$

$D = 3^3 - 12^2$ ☞ On effectue d'abord dans les parenthèses

$D = 27 - 144$ ☞ On applique la définition des puissances

$D = -117$ ☞ On effectue la soustraction



3-EME

Thème N°15 : PUISSANCE D'UN NOMBRE
Puissance d'un nombre d'exposant entier négatif
Puissance de 10

A - PUISSANCES D'EXPOSANT ENTIER NEGATIF

Définition :

Si $a \neq 0$, alors le nombre a^{-n} est l'inverse de a^{n}. C'est-à-dire : $a^{-n} = \dfrac{1}{a^{n}}$

Exemples :

$4^{-1} = \dfrac{1}{4^{1}} = 0{,}25$; $5^{-2} = \dfrac{1}{5^{2}} = \dfrac{1}{25} = 0{,}04$; $(-2)^{-3} = \dfrac{1}{(-2)^{3}} = \dfrac{1}{-8} = 0{,}125$

Méthode 1 : Savoir calculer une expression en utilisant les priorités opératoire

Exemple 1 : Donne l'écriture décimale du nombre $C = 6^{3} + 126 \times 3^{-2} - 8$

$C = 6^{3} + 126 \times 3^{-2} - 8$

$C = 216 + 126 \times \dfrac{1}{3^{2}} - 8$ ☞ On effectue d'abord les puissances

$C = 216 + 126 \times \dfrac{1}{9} - 8$ ☞ On effectue la multiplication

$C = 216 + 14 - 8$ ☞ On effectue un calcul de la gauche vers la droite

$C = 222$

B – REGLES DE CALCULS

Si $a \neq 0$ et si m et n sont des entiers relatifs, alors :

$$a^{m} \times a^{n} = a^{m+n} \quad et \quad \frac{a^{m}}{a^{n}} = a^{m-n} \quad ; \quad (a^{n})^{P} = a^{n \times p}$$

Si a et b sont des nombres différents de 0 et si n est un entier relatif, alors :

$$(ab)^{n} = a^{n} b^{n} \quad ; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{n} = \frac{a^{n}}{b^{n}}$$

Méthode 2: Utiliser les règles de calculs pour calculer

Exemples :

$3^4 \times 3^2 = 3^{4+2} = 3^6$; $9^5 \times 9^{-3} = 9^{5+(-3)} = 9^2$; $2^{-6} \times 2^5 = 2^{-6+5} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

$(-4)^{-2} \times (-4)^5 = (-4)^{-2+5} = (-4)^3$; $\frac{7^5}{7^3} = 7^{5-3} = 7^2$; $\frac{2^{12}}{2^{15}} = 2^{12-15} = 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

$(5^2)^3 = 5^{2\times3} = 5^6$; $\left((-8)^4\right)^7 = (-8)^{4\times7} = (-8)^{28}$; $(7^{-5})^2 = 7^{-5\times2} = 7^{-10}$

$(2\times3)^2 = 2^2 \times 3^2 = 4\times9 = 36$; $(5\times10^{-3})^2 = 5^2 \times (10^{-3})^2 = 25\times10^{-6}$

$(5x)^2 = 5^2 \times x^2 = 25x^2$; $(2\sqrt{5})^2 = 2^2 \times \sqrt{5}^2 = 4\times5 = 20$; $\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{4^2}{5^2} = \frac{16}{25}$

C - PUISSANCES DE DIX

1°) *Cas ou l'exposant est positif*

Pour tout entier positif n, l'écriture décimale de 10^n est un 1 suivi de n zéros

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $\underbrace{10 \times 10 \times 10 \times \ldots \times 10}_{n \text{ facteurs}} = \mathbf{10^n}$

Exemples : $1\,000 = 10 \times 10 \times 10 = 10^{\mathbf{3}}$; $1 = 10^{\mathbf{0}}$

2°) *Cas ou l'exposant est négatif*

Pour tout entier positif n, $\boxed{10^{-n} = \frac{1}{10^n}} = \frac{1}{10\ldots\ldots0} = 0,000\ldots01$ (n zéros précédent le 1 , sans oublier la virgule)

Exemple : $10^{-3} = = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = \mathbf{0{,}001}$

D - ECRITURE SCIENTIFIQUE D'UN NOMBRE DECIMAL

Nombre décimal non nul pouvant s'écrire sous la forme $a \times 10^n$, avec a un nombre décimal non nul ne comportant qu'un seul chiffre non nul avant la virgule et n un entier relatif.

Méthode 3: Savoir écrire un nombre en notation scientifique

Exemples : Ecrire en notation scientifique les nombres suivants :

A = 0,000 256 ; B = $783{,}9 \times 10^3$; C = $18 \times 10^{-5} \times 5{,}6 \times 10^7$

A = 0,000 256

A = $2{,}56 \times 10^{-4}$

B = $783{,}9 \times 10^3$

B = $(\mathbf{7{,}839} \times 10^{\mathbf{2}}) \times 10^{\mathbf{3}}$

B = $\mathbf{7{,}839} \times (10^{\mathbf{2}} \times 10^{\mathbf{3}})$

B = $7{,}839 \times 10^5$

$C = 18 \times 10^{-5} \times 5{,}6 \times 10^{7}$

$C = (18 \times 5{,}6) \times (10^{-5} \times 10^{7})$

$C = 100{,}8 \times 10^{2}$

$C = (1{,}008 \times 10^{2}) \times 10^{2}$

$C = 1{,}008 \times (10^{2} \times 10^{2})$

$\mathbf{C = 1{,}008 \times 10^{4}}$

Méthode 4: Comment organiser un calcul avec des puissances

Donne les écritures décimale et scientifique du nombre suivant : $A = \dfrac{7 \times 10^{7} \times 25 \times 10^{-5}}{14 \times 10^{8} \times 10^{-2}}$.

On rassemble les nombres et les puissances de dix $\quad A = \dfrac{7 \times 25}{14} \times \dfrac{10^{7} \times 10^{-5}}{10^{8} \times 10^{-2}}$

On simplifie les nombres et les puissances de dix $\quad A = \dfrac{7 \times 25}{2 \times 7} \times \dfrac{10^{7+(-5)}}{10^{8+(-2)}}$

$A = \dfrac{25}{2} \times \dfrac{10^{2}}{10^{6}}$

$A = 12{,}5 \times 10^{2-6}$

$A = 12{,}5 \times 10^{-4}$

L'écriture scientifique est $\quad A = 1{,}25 \times 10^{1} \times 10^{-4}$

$A = 1{,}25 \times 10^{1+(-4)}$

$\boxed{A = 1{,}25 \times 10^{-3}}$

L'écriture décimale est $\quad A = 1{,}25 \times 0{,}001$

$\boxed{A = 0{,}00125}$

E - LES PREFIXES

Puissance de dix	Préfixe	Symbole
10^{9}	giga	G
10^{6}	méga	M
10^{3}	kilo	k
10^{2}	hecto	h
10^{1}	déca	da
10^{-1}	déci	d
10^{-2}	centi	c
10^{-3}	milli	m
10^{-6}	micro	µ
10^{-9}	nano	n

Exemples :

7 kilogrammes = **7 kg = 7 × 10^{3} g = 7 000 g**
8 mégaoctets = **8 Mo = 8 × 10^{6} octets**
9 micromètres = **9 µm = 9 × 10^{-6} m**
12 cL = **12 × 10^{-2} L = 0,12 L**

Méthode 5: Utiliser les puissances de dix pour convertir.

Enoncé : Le rayon d'un atome de plomb est $1{,}8 \times 10^{-10}$ m. Le convertir en nanomètre

Solution :

On sait que : 10^{-9} m = 1 nm

Donc : $1 \text{ m} = \dfrac{1}{10^{-9}} \text{ nm} = 10^{9} \text{ nm}$

En utilisant un tableau de proportionnalité, on a :

Distance (en m)	1	$1{,}8 \times 10^{-10}$
Distance (en nm)	10^{9}	x

Soit : $x = \dfrac{1{,}8 \times 10^{-10} \times 10^{9}}{1} = 1{,}8 \times 10^{-1} = 0{,}18$

Conclusion : Le rayon d'un atome de plomb est 0,18 nm

Objectif brevet : *Amérique du Nord – Juin 2010 (Extrait)*

Donner l'écriture scientifique du nombre $A = \dfrac{6 \times 10^{12} \times 35 \times 10^{-4}}{14 \times 10^{3}}$.

$A = \dfrac{6 \times 10^{12} \times 35 \times 10^{-4}}{14 \times 10^{3}}$

$A = \dfrac{6 \times 35}{14} \times \dfrac{10^{12} \times 10^{-4}}{10^{3}}$

$A = 15 \times \dfrac{10^{12+(-4)}}{10^{3}}$

$A = 15 \times \dfrac{10^{8}}{10^{3}}$

$A = 15 \times 10^{8-3}$

$A = 15 \times 10^{5}$

$A = 1{,}5 \times 10^{1} \times 10^{5}$

$A = 1{,}5 \times 10^{1+5}$

$A = 1{,}5 \times 10^{6}$

L'écriture scientifique est $A = 1{,}5 \times 10^{6}$