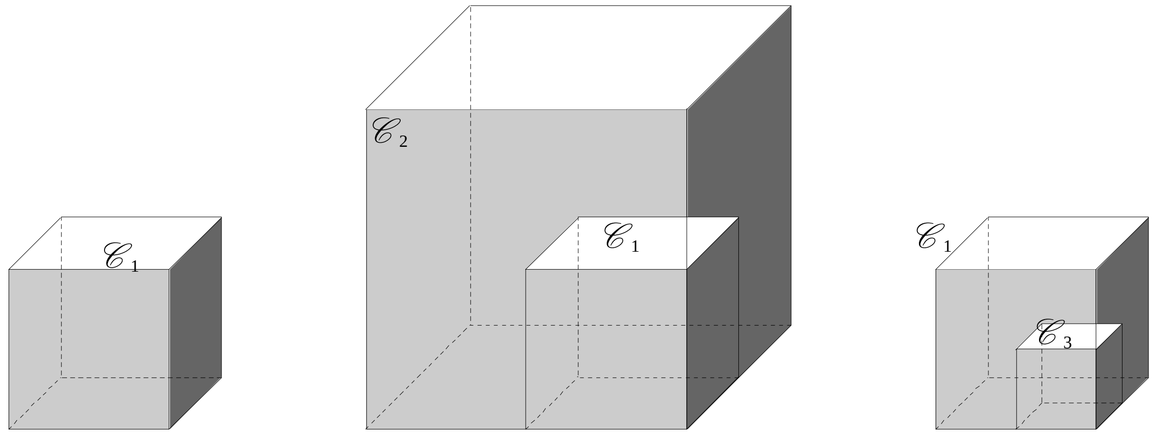
Thème N°19 :
EFFET D'UN AGRANDISSEMENT-REDUCTION

* *

A la fin du thème, tu dois savoir :

- Agrandissement - Réduction
- Comprendre les effets d'un agrandissement ou d'une réduction sur les longueurs et les angles
- Comprendre les effets d'un agrandissement ou d'une réduction sur les Aires et les volumes
- Comprendre l'effet d'une homothétie sur une figure
- Trouver le coefficient d'agrandissement ou de réduction.

ACTIVITE:



On mettra les résultats dans le tableau ci-dessous.

1°) On considère un cube C_1 d'arête 3 cm. Calcule l'aire de chaque face du cube et le volume de ce cube.

Aire $C_1 = 3^2 = 9$ (cm²) **Volume $C_1 = 3^3 = 27$ (cm³)** .

2°) On multiplie la longueur des arêtes par 2 ; on obtient le cube C_2.

a) Quelle est la longueur des arêtes du cube C_2 ? : **$2 \times 3 = 6$ (cm)**

b) Calcule l'aire de chaque face du cube C_2 et le volume de ce cube.

Aire $C_2 = 6^2 = 36$ (cm²) **Volume $C_2 = 6^3 = 216$ (cm³)**

c) Par quel nombre l'aire de chaque face du cube C_1 a-t-elle été multipliée pour obtenir l'aire de chaque face du cube C_2 ? : **L'aire a été multipliée par $2^2 = 4$ ($36 : 9 = 4$)**

Même question pour le volume : **Le volume a été multiplié par $2^3 = 8$ ($216 : 27 = 8$)**

3°) On divise la longueur des arêtes de C_1 par 2; on obtient le cube C_3.

a) Quelle est la longueur des arêtes du cube C_3 ? **$3 : 2 = 1{,}5$ (cm)**

b) Calcule l'aire de chaque face du cube C_3 et le volume de ce cube.

Aire $C_3 = 1{,}5^2 = 2{,}25$ (cm²) **Volume $C_3 = 1{,}5^3 = 3{,}375$ (cm³)** .

c) Par quel nombre la longueur de chaque arête du cube C_1 a-t-elle été multipliée pour obtenir la longueur de chaque arête du cube C_3 ? **La longueur a été multipliée par 0,5 (3 × 0,5 = 1,5 (cm))**

Même question pour l'aire de chaque face et pour le volume :
L'aire a été multipliée par 0,5 ² = 0,25 (2,25 : 9 = 0,25)
Le volume a été multiplié par 0,5 ³ = 0,125 (3,375 : 27= 0,125)

4°) Reprends le questionnement sur l'aire des faces et le volume dans le cas où la longueur des arêtes a été multipliée par un nombre positif *k*.

	Longueur de l'arête	**Aire d'une face**	**Volume du cube**
cube C_1	**3**	**9**	**27**
cube C_2	**6 (× 2)**	**36 (× 2 ²)**	**216 (× 2 ³)**
cube C_3	**1,5 (× 0,5)**	**2,25 (× 0,5 ²)**	**3,375 (× 0,5 ³)**
cube C_k	**3 × k**	**9 × k ²**	**27 × k ³**

On dit que le cube $\mathscr{C}_2$ est un **agrandissement** du cube $\mathscr{C}_1$ dans le **rapport d'agrandissement 2**

et que le cube $\mathscr{C}_3$ est une **réduction** du cube $\mathscr{C}_1$ dans le **rapport de réduction** $\frac{1}{2}$.

Quand on applique une réduction ou un agrandissement de rapport *k* (*k* est compris entre 0 et 1 dans une réduction, *k* est supérieur à 1 pour un agrandissement), on **multiplie** ses dimensions (les **longueurs**) par ***k***
Mais attention, les **aires** sont multipliées par ***k ²***. et les **volumes** par ***k ³***

Exercice n°1 :

On multiplie par 0,9 les dimensions d'un rectangle.

1. Est-ce une réduction ou un agrandissement ?

   Comme 0,9 < 1 , alors il s'agit d'une réduction.

2. Par quel nombre est multiplié :
   a. son périmètre ? :

      Son périmètre est multiplié par 0,9

   b. son aire ? :

      Son aire est multiplié par (0,9) ²

Exercice n°2 :

On multiplie par 1,3 le rayon d'un cercle.

1. Est-ce un agrandissement ou une réduction ? :

   Comme 1,3 > 1 , alors il s'agit d'un agrandissement

2. Par quel nombre est multiplié :
   a. le diamètre ? :

      Le diamètre est multiplié par 1,3

   b. la longueur du cercle ? :

      La longueur du cercle est multiplié par 1,3

   c. l'aire du disque ? :

      L'aire du disque est multipliée par (1,3) ² = 1,69

Exercice n°3 :
Par quel nombre faut-il diviser l'arête d'un cube pour que son volume soit divisé par 125 ? :

On a $\frac{1}{125} = \left(\frac{1}{5}\right)^3$. Il faut donc diviser l'arête d'un cube par 5

Exercice n°4 :
Un plateau de table rectangulaire mesure 60 cm sur 1,10 m. L'épaisseur du plateau est 18 mm.
1. a. Calcule l'aire du plateau, en m² :

Aire = $0,6 \times 1,10 = 0,66$ (m²)

b. Calcule le volume du plateau, en m^3 :

Volume = $0,66 \times 0,018 = 0,01188$ (m^3)

2. On réalise un modèle réduit du plateau (réduction de coefficient 0,75). En utilisant les réponses aux questions **1.a.** et **b.** , calcule :
a. l'aire du plateau réduit :

Aire = $0,66 \times 0,75^2 = 0,37125$ (m²)

b. son volume :

Volume = $0,01188 \times 0,75^3 \approx 0,005$ (m^3)

Exercice n°5:
a) La pyramide de sommet O et de hauteur OT est une réduction de la pyramide de sommet O et de hauteur OI.
Le rapport de réduction est : $k = \frac{OT}{OI} = \frac{1,5}{5} = 0,3$
Soit A l'aire de la base ABSR, on a : A = 4 ² = 16 (cm²)
Soit A ' l'aire de la section , on a : $A' = k^2 \times A = 0,3^2 \times 16 = 1,44$
Conclusion : **l'aire de section est 1,44 cm²**

b) On a : $A' = k^2 \times A$ avec A ' = 2,56 cm² et A = 16 cm²
Donc : $k^2 = \frac{A'}{A} = \frac{2,56}{16} = 0,16$. Et le coefficient de réduction est donc : $k = \sqrt{0,16} = 0,4$

Ainsi, la distance du sommet au plan est : $OI \times k = 5 \times 0,4 = 2$
Conclusion : **Il faut placer le plan à 2 cm du sommet**

c) Cherchons d'abord la hauteur de la pyramide
• Calcul de RB
Dans le triangle ABR rectangle en A (car ABSR est un carré), d'après le théorème de Pythagore, on a :
$RB^2 = AB^2 + AR^2$
$RB^2 = 6^2 + 6^2$
$RB^2 = 36 + 36$
$RB^2 = 72$
$RB = \sqrt{72}$
Conclusion : $RB = \sqrt{72}$ cm

• Calcul de IB
On a : $IB = \frac{RB}{2} = \frac{\sqrt{72}}{2} = \sqrt{\frac{72}{4}} = \sqrt{18}$ Conclusion : $IB = \sqrt{18}$ cm

• Calcul de OI

Dans le triangle AIO rectangle en I, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$AO^2 = AI^2 + IO^2$

$6^2 = \sqrt{18}^{\,2} + IO^2$ (AO = AB car les triangles sont équilatéraux)

$IO^2 = 36 - 18$

$IO^2 = 18$

$IO = \sqrt{18}$

Conclusion : $IO = \sqrt{18}$ cm

• Calcul du coefficient de réduction

On a : $A' = k^2 \times A$ avec $A' = 2$ cm² et $A = 6^2 = 36$ cm²

Donc : $k^2 = \dfrac{A'}{A} = \dfrac{2}{36} = \dfrac{1}{18}$. Et le coefficient de réduction est donc : $k = \sqrt{\dfrac{1}{18}} = \dfrac{1}{\sqrt{18}}$

• Calcul de la distance au sommet

Ainsi, la distance du sommet au plan est : $OI \times k = \sqrt{18} \times \dfrac{1}{\sqrt{18}} = 1$

Conclusion : **Il faut placer le plan à 1 cm du sommet**

Exercice n°6:

a) • Calcul de AS dans le triangle ASU rectangle en U.

Dans le triangle ASU rectangle en U, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$AS^2 = AU^2 + US^2$

$AS^2 = 6^2 + 8^2$

$AS^2 = 36 + 64$

$AS^2 = 100$

$AS = \sqrt{100}$

$AS = 10$

Conclusion : AS = 10 cm

• Calcul du coefficient de réduction

La section d'une pyramide par un plan parallèle à la base est un polygone qui est une réduction du polygone de base.

Donc si A est l'aire de la section réduite, B est l'aire de la base AMU et k le coefficient de réduction, alors $A = k^2 B$.

Et d'après l'énoncé, $A = 0{,}16\,B$ donc $k^2 = 0{,}16$ et ainsi $\boldsymbol{k = 0{,}4}$

• Calcul de OS

On a : $OS = k \times AS = 0{,}4 \times 10 = 4$

Conclusion : **OS = 4 cm**

b) • Calcul de RA

Dans le triangle MAR rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$MR^2 = MA^2 + AR^2$

$5^2 = 3^2 + AR^2$

$AR^2 = 25 - 9$

$AR^2 = 16$

$AR = \sqrt{16}$

$AR = 4$

Conclusion : AR = 4 cm

- Calcul de l'aire du triangle MAR

Soit A l'aire du triangle MAR, on a : $A = \frac{MA \times RA}{2} = \frac{3 \times 4}{2} = 6$.

Conclusion : l'aire du triangle MAR égale 6 cm²

- Calcul du volume de la pyramide OMAR

Si V est le volume, on a : V = $\frac{1}{3}$(aire de la base $\times$ hauteur) = $\frac{A \times OM}{3} = \frac{6 \times 6}{3} = 12$

Conclusion : V = 12 cm^3

- Calcul du coefficient de réduction :

soit k le coefficient de réduction, on a : $k = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

- Calcul du volume de la petite pyramide

Soit V ' le volume de la petite pyramide, on a : $V' = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times V = \frac{1}{27} \times 12 = \frac{12}{27} = \frac{4}{9}$

Conclusion : **Le volume de la pyramide obtenue est $\frac{4}{9}$ cm^3**