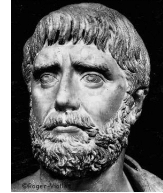
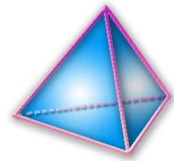


Thème N°17: THEOREME DE THALES (2) LA RECIPROQUE



A la fin du thème, tu dois savoir :

- ☞ Démontrer que deux droites sont parallèles
- ☞ Démontrer que deux droites ne sont pas parallèles
- ☞ Résoudre des problèmes de géométrie plane, prouver ou réfuter une conjecture



« Pour prendre un bon départ »

Exercice n°1 : Les droites (EF) et (GH) sont parallèles.

AG = 35 cm ; AH = 28 cm ; AF = 6 cm.

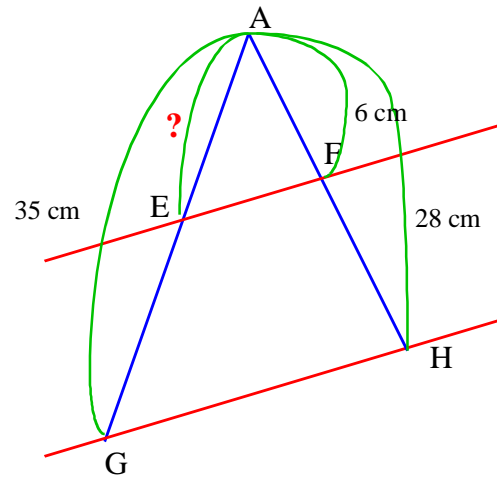
Calcule la longueur AE.

On sait que les droites (EG) et (FH) sont sécantes en A et (EF) parallèle à (GH).

D'après le théorème de Thalès, on a : $\frac{AE}{AG} = \frac{AF}{AH} = \frac{EF}{GH}$.

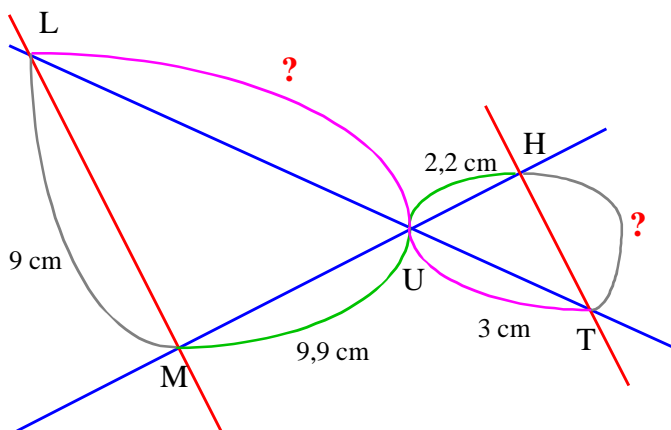
Soit $\frac{AE}{35} = \frac{6}{28}$ d'où $AE = 35 \times \frac{6}{28} = \frac{210}{28} = 7,5$

Conclusion : AE = 7,5 cm



Exercice n°2 : Deux droites sécantes en U sont coupées par deux droites parallèles comme sur la figure ci-contre. TU = 3 cm ; UH = 2,2 cm ; UM = 9,9 cm ; ML = 9 cm

Calcule UL et TH.



On sait que les droites (LT) et (MH) sont sécantes en U et les droites (LM) et (HT) sont parallèles.

D'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{UH}{UM} = \frac{UT}{UL} = \frac{HT}{LM}$$

Calcul de UL : On a $\frac{UT}{UL} = \frac{UH}{UM}$ soit $\frac{3}{UL} = \frac{2,2}{9,9}$ d'où $UL = \frac{3 \times 9,9}{2,2} = \frac{29,7}{2,2} = 13,5$

Conclusion : UL = 13,5 cm

Calcul de HT : On a $\frac{HT}{LM} = \frac{UH}{UM}$ soit $\frac{HT}{9} = \frac{2,2}{9,9}$ d'où $HT = \frac{9 \times 2,2}{9,9} = \frac{19,8}{9,9} = 2$

Conclusion : HT = 2 cm

ACTIVITE : Construction du triangle ABC tel que AC = 8 cm ; AB = 6 cm et BC = 4 cm.
M est point de [AB] AM = 1,5 cm. N un point de [AC] que AN = 2 cm.

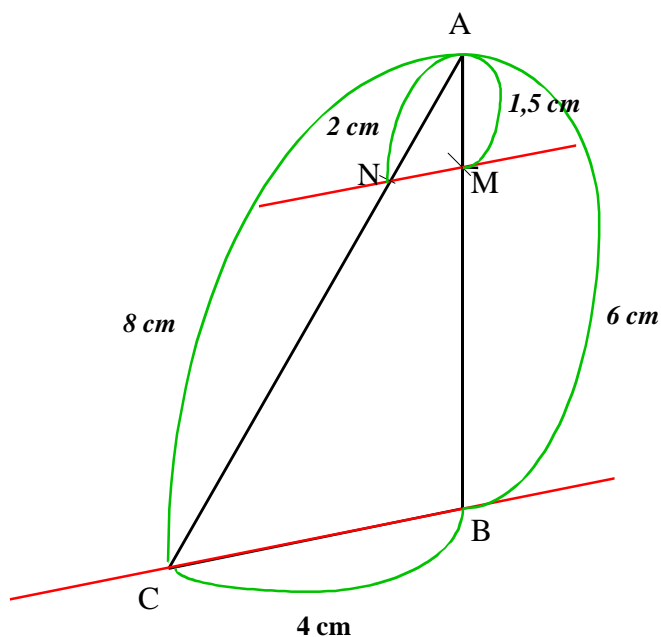
1°) Démontrons que les quotients $\frac{AM}{AB}$ et $\frac{AN}{AC}$ sont égaux.

$$\frac{AM}{AB} = \frac{1,5}{6} = \frac{15}{60} = \frac{1}{4} \text{ et } \frac{AN}{AC} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

donc $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$

2°) En observant le dessin, comment semblent être les droites (MN) et (BC) ?

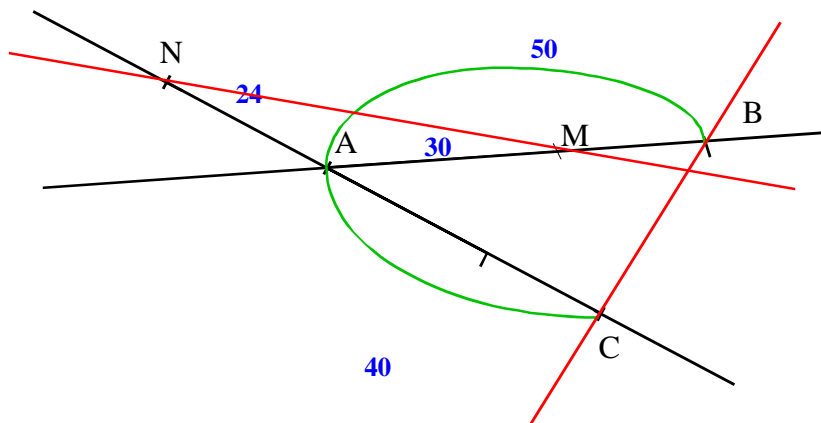
Les droites (MN) et (BC) semblent **parallèles**



3°) Énoncé la propriété vérifiée sur cet exemple.

Si $\frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB}$ alors les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

4°) Teste de l'énoncé



On a : $\frac{AN}{AC} = \frac{24}{40} = \frac{3}{5}$ et $\frac{AM}{AB} = \frac{30}{50} = \frac{3}{5}$

Donc $\frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB}$

Or les droites (MN) et (BC) **ne sont pas parallèles**.

Donc il faut une **autre condition** pour que la propriété marche.

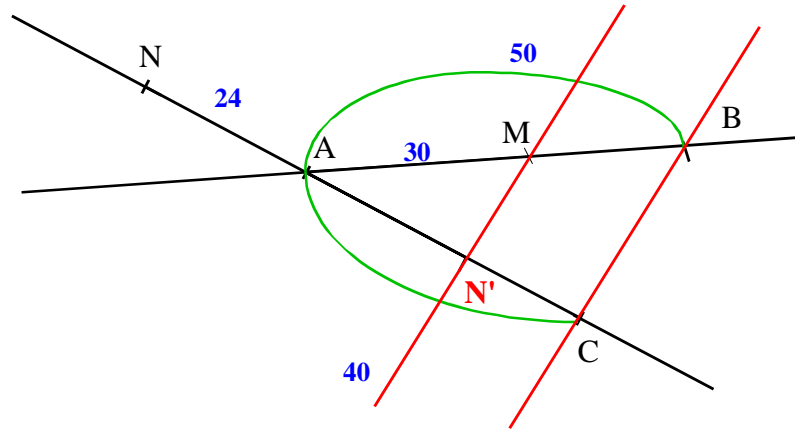
Les autres figures

	figure 1	figure 2	figure 3
$\frac{AM}{AB} =$	$\frac{30}{50} = 0,6$	$\frac{70}{50} = 1,4$	$\frac{25}{50} = 0,5$
$\frac{AN}{AC} =$	$\frac{24}{40} = 0,6$	$\frac{56}{40} = 1,4$	$\frac{20}{40} = 0,5$
Les rapports $\frac{AM}{AB}$ et $\frac{AN}{AC}$ sont-ils égaux ?	OUI	OUI	OUI
Les droites (MN) et (BC) sont-elles parallèles ?	NON	NON	NON

5°) Construction du point N' symétrique du point N par rapport à A.

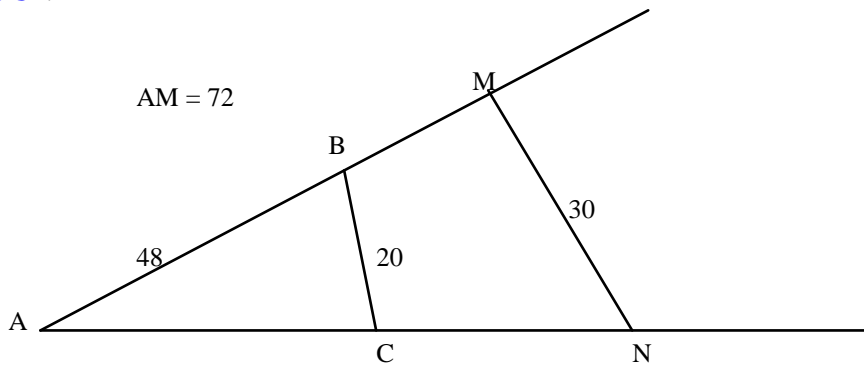
On constate que les droites (MN') et (BC) sont parallèles et les rapports $\frac{AM}{AB}$ et $\frac{AN'}{AC}$ sont égaux.

Si $\frac{AN'}{AC} = \frac{AM}{AB}$ et si les points A, B, M et les points A, C, N sont alignés dans le même ordre alors les droites (MN') et (BC) sont parallèles



Attention ! Il faut bien comparer les bons rapports !!

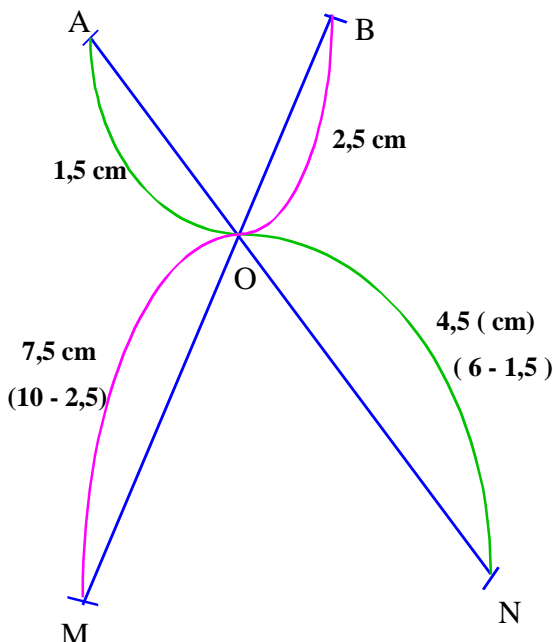
Observe cette figure: Est-ce que la position de M par rapport à A et B est bien la même que celle de N par rapport à A et C ? : **OUI**.



Calcule: $\frac{AM}{AB} = \frac{72}{48} = \frac{24 \times 3}{24 \times 2} = \frac{3}{2}$; $\frac{MN}{BC} = \frac{30}{20} = \frac{3}{2}$

Comparaison des rapports : on a $\frac{AM}{AB} \neq \frac{MN}{BC}$ Est-ce que (MN) // (BC) ? **NON**

Conclusion: Ne pas travailler avec les segments portés par les deux parallèles.



Exercice n°3 :

Le point O appartient aux segments [AN] et [BM].
 Donc : $ON = AN - OA = 6 - 1,5 = 4,5$ (cm)
 $OM = MB - OB = 10 - 2,5 = 7,5$ (cm).

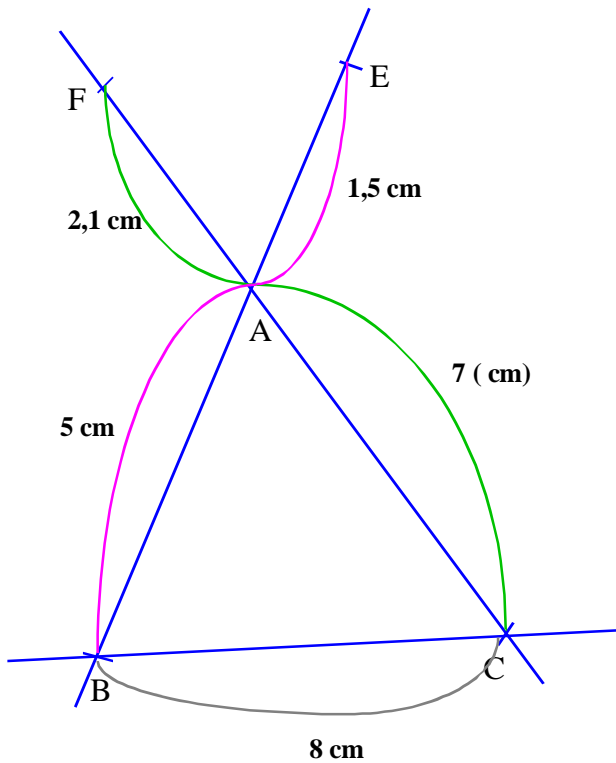
On a: $\frac{ON}{OA} = \frac{4,5}{1,5} = \frac{45}{15} = 3$ et $\frac{OM}{OB} = \frac{7,5}{2,5} = \frac{75}{25} = 3$

Les droites (AN) et (BM) sont sécantes en O, les points A, O, N et les points B, O, M sont alignés dans cet ordre, et on a :

$\frac{ON}{OA} = \frac{OM}{OB} = 3$.

Donc, d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (AB) et (MN) sont parallèles.

Exercice n°4 :



1. On a : $\frac{AF}{AC} = \frac{2,1}{7} = 0,3$ et $\frac{AE}{AB} = \frac{1,5}{5} = 0,3$

Les droites (EB) et (FC) sont sécantes en A, les points F, A, C et les points E, A, B sont alignés dans le même ordre, et on a

$$\frac{AF}{AC} = \frac{AE}{AB} = 0,3.$$

Donc, d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (AC) et (FE) sont parallèles.

2. Calcul de EF

On sait que les droites (EB) et (FC) sont sécantes en A et les droites (BC) et (FE) sont parallèles d'après la question 1.

Donc, d'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC} = \frac{AE}{AB}.$$

Soit $\frac{2,1}{7} = \frac{EF}{8}$ et $EF = \frac{8 \times 2,1}{7} = 2,4$

Conclusion : EF = 2,4 cm

Exercice n°5 :

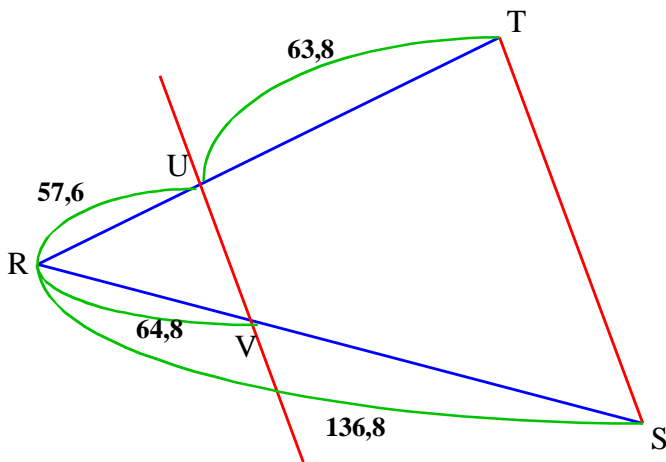


Figure 1 :

Le point U appartient au segment [RT],

donc $RT = RU + UT = 57,6 + 63,8 = 121,4$

On a : $\frac{RU}{RT} = \frac{57,6}{121,4} = \frac{576}{1214} = \frac{288}{607} = \frac{5472}{11533}$

$\frac{RV}{RS} = \frac{64,8}{136,8} = \frac{648}{1368} = \frac{9 \times 72}{19 \times 72} = \frac{9}{19} = \frac{5463}{11533}$

Les droites (UT) et (VS) se coupent en R

Si les droites (UV) et (TS) étaient parallèles, d'après le théorème de Thalès, on aurait

$\frac{RU}{RT} = \frac{RV}{RS}$; or $\frac{5472}{11533} \neq \frac{5463}{11533}$

Conclusion : Les droites (UV) et (TS) ne sont pas parallèles

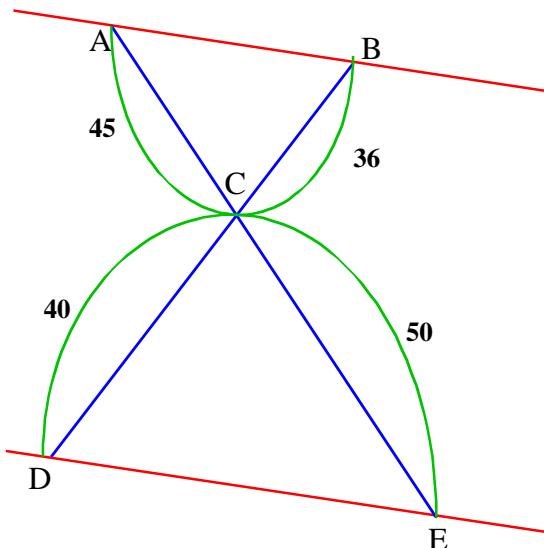


Figure 2 :

On a : $\frac{CB}{CD} = \frac{36}{40} = \frac{9}{10}$ et $\frac{CA}{CE} = \frac{45}{50} = \frac{9}{10}$

Les droites (AE) et (BD) se coupent en C ;

Les points A, C, E et les points B, C, D sont dans le même ordre ;

et on a : $\frac{CA}{CE} = \frac{CB}{CD} = \frac{9}{10}$

D'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (AB) et (DE) sont parallèles.

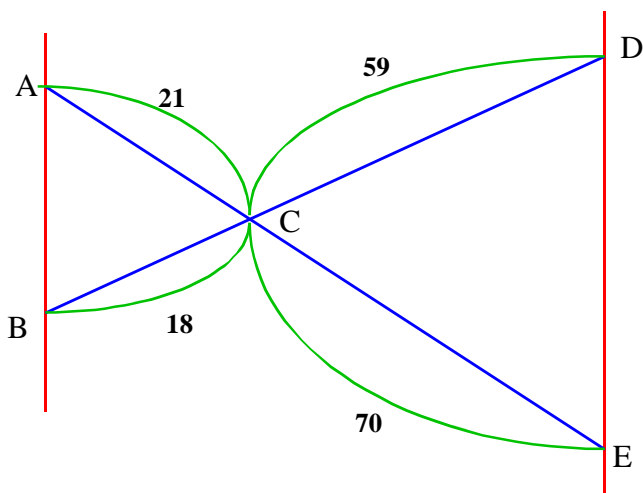


Figure 3 :

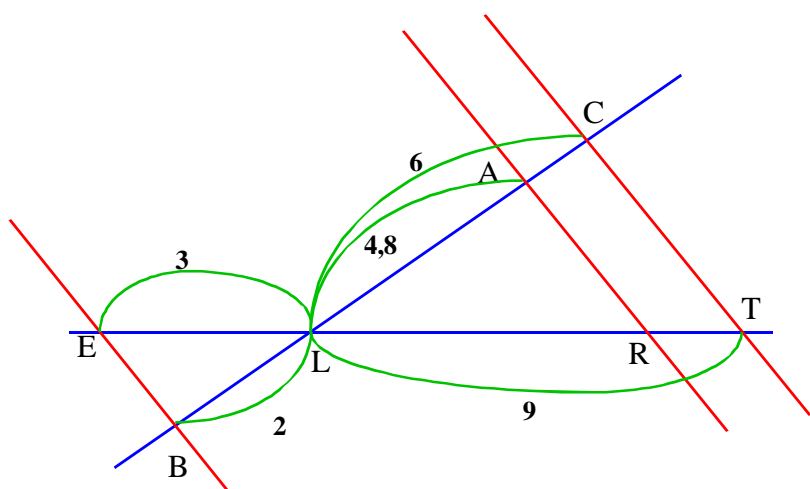
On a : $\frac{CB}{CD} = \frac{18}{59} = \frac{180}{590}$ et $\frac{CA}{CE} = \frac{21}{70} = \frac{3}{10} = \frac{177}{590}$

Les droites (EA) et (BD) se coupent en C
Si les droites (AB) et (DE) étaient parallèles, d'après le théorème de Thalès, on aurait

$$\frac{CB}{CD} = \frac{CA}{CE} \quad ; \quad \text{or} \quad \frac{180}{590} \neq \frac{177}{590}$$

Conclusion : Les droites (AB) et (DE) ne sont pas parallèles

Exercice n°6



1. Calcul de LR

On sait que les droites (AC) et (RT) sont sécantes en L et les droites (AR) et (CT) sont parallèles.

D'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{LA}{LC} = \frac{LR}{LT}, \text{ soit } \frac{4,8}{6} = \frac{LR}{9} \text{ donc}$$

$$LR = 9 \times \frac{4,8}{6} = 7,2$$

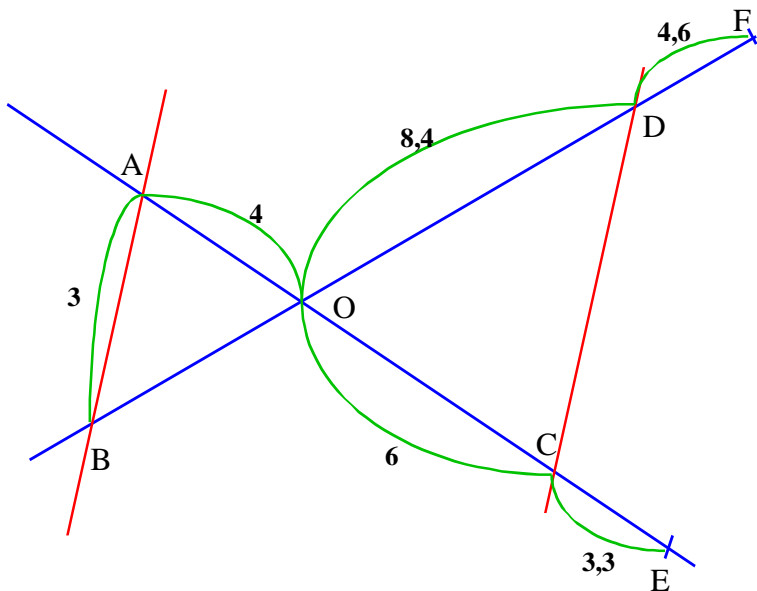
Conclusion : LR = 7,2 cm

2. On a : $\frac{LT}{LE} = \frac{9}{3} = 3$ et $\frac{LC}{LB} = \frac{6}{2} = 3$.

Les droites (CB) et (ET) sont sécantes en L, les points E, L, T et les points B, L, C sont alignés dans le même ordre et on a

$$\frac{LT}{LE} = \frac{LC}{LB} = 3.$$

Donc, **d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (EB) et (CT) sont parallèles.**



Exercice n°7

1. a. Calcul de OB

- Les droites (BD) et (AC) sont sécantes en O.

- (AB) et (DC) parallèles.

D'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} = \frac{AB}{DC}.$$

$$\text{Soit } \frac{4}{6} = \frac{OB}{8,4}$$

$$\text{Donc } OB = \frac{4 \times 8,4}{6} = 5,6$$

Conclusion : OB = 5,6 cm.

b. Calcul de CD

D'après la question 1.a., on a : $\frac{4}{6} = \frac{3}{CD}$.

Donc $CD = \frac{6 \times 3}{4} = 4,5$.

Conclusion : **CD = 4,5 cm.**

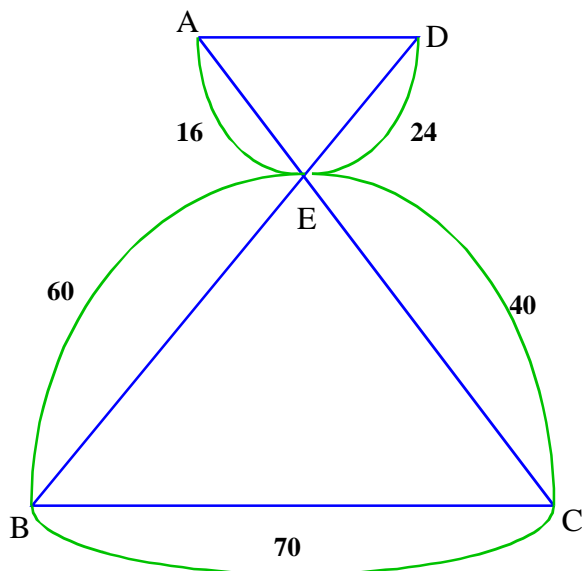
2. • Le point D appartient au segment [OF], donc $OF = OD + DF = 8,4 + 4,6 = 13$
Le point C appartient au segment [OE], donc $OE = OC + CE = 6 + 3,3 = 9,3$.

• On a : $\frac{OD}{OF} = \frac{8,4}{13} = \frac{8,4 \times 9,3}{13 \times 9,3} = \frac{78,12}{120,9}$ et $\frac{OC}{OE} = \frac{6}{9,3} = \frac{6 \times 13}{9,3 \times 13} = \frac{78}{120,9}$

Les droites (DF) et (CE) sont sécantes en O. Si les droites (DC) et (EF) étaient parallèles, d'après le théorème de Thalès, on aurait $\frac{OD}{OF} = \frac{OC}{OE}$; or $\frac{8,4}{13} \neq \frac{6}{9,3}$

Conclusion : **Les droites (FE) et (DC) ne sont pas parallèles.**

Exercice n°8 :



1. On a : $\frac{EA}{EC} = \frac{16}{40} = \frac{4}{10}$ et $\frac{ED}{EB} = \frac{24}{60} = \frac{4}{10}$.

Les droites (DB) et (AC) sont sécantes en E, les points D, E, B et les points A, E, C sont alignés dans le même ordre et on a :

$$\frac{EA}{AC} = \frac{ED}{EB} = \frac{4}{10}.$$

Donc d'après la réciproque du théorème de Thalès, **les droites (AD) et (BC) sont parallèles.**

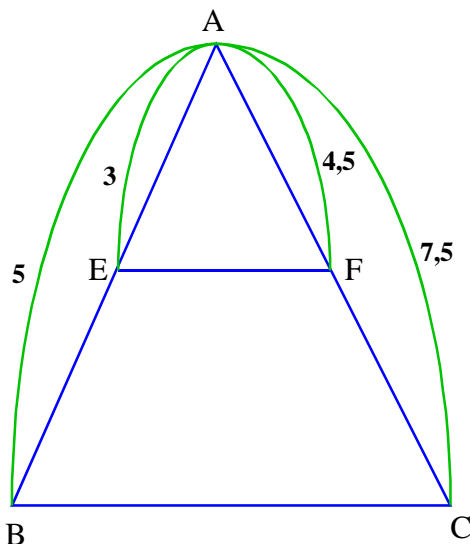
2. Calcul de AD

On sait que les droites (BD) et (AC) sont sécantes en E et les droites (DA) et (BC) sont parallèles.

D'après le théorème de Thalès, on a : $\frac{AE}{EC} = \frac{AD}{BC} = \frac{ED}{EB}$.

Soit $\frac{16}{40} = \frac{AD}{70}$ donc $AD = 70 \times \frac{16}{40} = 28$.

Conclusion : **AD = 28 mm**



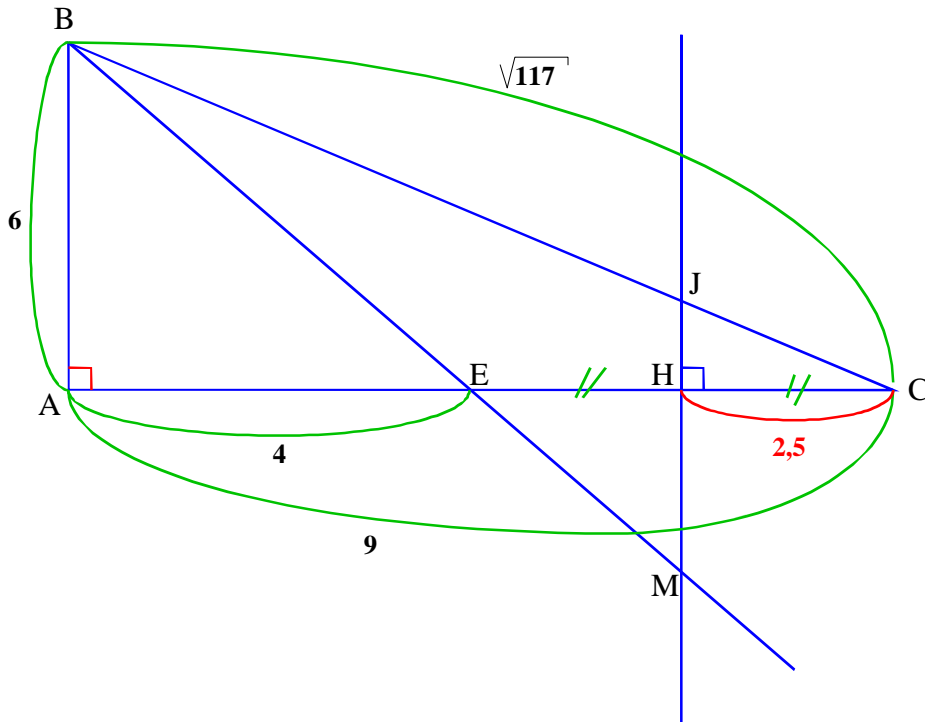
Exercice n°9 :

On a : $\frac{AE}{AB} = \frac{3}{5}$ et $\frac{AF}{AC} = \frac{4,5}{7,5} = \frac{45}{75} = \frac{3}{5}$.

On sait que les droites (BE) et (CF) sont sécantes en C et les points A, E, B et les points A, F, C sont alignés dans le même ordre.

Comme $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{3}{5}$, alors d'après la réciproque du théorème de Thalès, **les droites (EF) et (BC) sont parallèles.**

Exercice n°10 :



1. Nature du triangle ABC

On a : $BC^2 = \sqrt{117}^2 = 117$

et

$$AB^2 + AC^2 = 6^2 + 9^2 = 36 + 81 = 117$$

Comme $BC^2 = AB^2 + AC^2$, alors d'après la réciproque du théorème de Pythagore, **le triangle ABC est rectangle en A.**

2. a) On sait que : (JH) est la médiatrice du segment [AC], donc (JH) perpendiculaire à (AC).

D'après la question 1. on a (AB) perpendiculaire à (AC).

Or, si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième droite alors elles sont parallèles entre-elles.

Conclusion : **(JH) et (AB) sont parallèles.**

On a $CH = \frac{1}{2} EC$ car (JH) est la médiatrice de [EC] et H est un point de [EC].

De plus, E est un point de [AC], donc $EC = AC - AE = 9 - 4 = 5$ (cm).

$$\text{D'où } CH = \frac{1}{2} EC = \frac{1}{2} \times 5 = 2,5$$

Conclusion : **CH = 2,5 cm**

2. b) Calcul de JH.

On sait que les droites (BJ) et (AH) sont sécantes en C et les droites (JH) et (AB) sont parallèles.

D'après le théorème de Thalès, on a : $\frac{CH}{CA} = \frac{JH}{AB} = \frac{CJ}{CB}$.

$$\text{Soit } \frac{JH}{6} = \frac{2,5}{9} \text{ et } JH = \frac{6 \times 2,5}{9} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}.$$

Conclusion : **La valeur exacte de JH est $\frac{5}{3}$ cm.**

2.c) Calcul de HM.

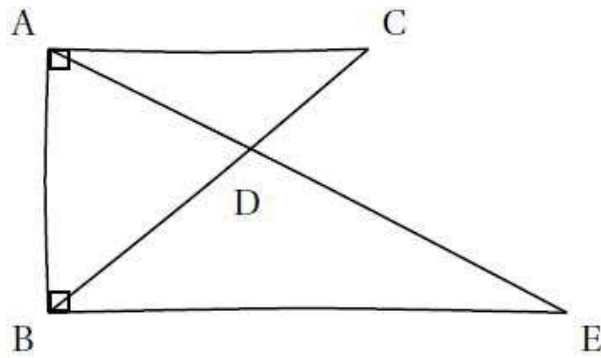
Les droites (BM) et (AH) sont sécantes en E et les droites (AB) et (HM) sont parallèles, d'après le théorème de

Thalès, on a : $\frac{HM}{AB} = \frac{EH}{EA}$ soit $\frac{HM}{6} = \frac{2,5}{4}$ et $HM = \frac{6 \times 2,5}{4} = \frac{15}{4} = 3,75$

Conclusion : **HM = 3,75 cm.**

Exercice 11 :

1) La figure ici n'est pas en vraie grandeur.



2) On sait que : les droites (AC) et (BE) sont parallèles à (AB)

D'après la propriété : Si deux droites sont parallèles à une même troisième droite alors elles sont parallèles entre elles.

Donc : (AC) et (BE) sont parallèles.

3) On sait que : Les droites (AE) et (BC) sont sécantes en D et les droites (AC) et (BE) sont parallèles.

D'après le théorème de Thalès, on a : $\frac{DC}{DB} = \frac{DA}{DE} = \frac{AC}{BE}$

$$\text{D'où : } \frac{1,5}{2,5} = \frac{DA}{DE} = \frac{2,4}{BE} \quad \text{Soit : } BE = \frac{2,5 \times 2,4}{1,5} = \frac{6}{1,5} = 4$$

Conclusion : BE = 4 cm

$$4) \text{ Aire}(ABE) = \frac{AB \times BE}{2} = \frac{3,2 \times 4}{2} = 6,4$$

Conclusion : L'aire du triangle ABE est 6,4 cm²

Exercice 12 :

1) On sait que le triangle ABS est rectangle en B.

D'après le théorème de Pythagore, on a :

$$AS^2 = AB^2 + BS^2$$

$$AS^2 = 2,5^2 + 6^2$$

$$AS^2 = 6,25 + 36$$

$$AS^2 = 42,25$$

$$AS = \sqrt{42,25}$$

$$AS = 6,5$$

[AS] mesure 6,5 m.

$$2) SN = SB - NB = 6 - 1,8 = 4,2$$

[SN] mesure 4,2 m.

$$SM = SA - MA = 6,5 - 1,95 = 4,55$$

[SM] mesure 4,55 m.

$$3) \frac{SM}{SA} = \frac{4,55}{6,5} = 0,7 \quad \text{et} \quad \frac{SN}{SB} = \frac{4,2}{6} = 0,7$$

Les droites (AM) et (BN) se coupent en S, les points S, M, A et les points S, N, B sont alignés dans le même ordre.

De plus, on constate que $\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB}$.

D'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (MN) et (AB) sont parallèles.

Conclusion : la traverse [MN] est bien parallèle au sol.

Exercice 13 :

1) Dans le triangle ADC rectangle en A :

$$\tan(\widehat{CDA}) = \frac{AC}{AD} = \frac{76}{154}$$

$$\widehat{CDA} = \tan^{-1}\left(\frac{76}{154}\right) \approx 26$$

La mesure de l'angle \widehat{CDA} formé par le hauban [CD] et la chaussée est d'environ 26°.

2)

$$\frac{AE}{AC} = \frac{76-5}{76} \approx 0,93 \quad \text{et} \quad \frac{AF}{AD} = \frac{154-12}{154} \approx 0,92$$

$$\frac{AE}{AC} \neq \frac{AF}{AD}$$

donc les droites (EF) et (CD) ne sont pas parallèles.

Conclusion : les haubans [CD] et [EF] ne sont pas parallèles.